1. 두 함수 $f(x) = ax+b$, $g(x) = 3x-2$에 대하여 $(f \circ g)(1) = 2$, $(g \circ f)(2) = 3$을 만족하는 상수 a, b의 합 $4a+b$를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$(f \circ g)(1) = 2$에서

$(f \circ g)(1) = f(g(1)) = f(1) = a+b$

$\therefore a+b=2$

2. 실수 전체의 집합 R 에서 R 로의 함수 $f(x) = ax + b|x|$ (a, b는 상수)가 역함수를 가질 조건은?

① $a^2 - b^2 < 0$ ② $a^2 - b^2 > 0$ ③ $a + b > 0$

④ $a - b > 0$ ⑤ $a - b < 0$

해설

$$f(x) = \begin{cases} (a+b)x & (x \geq 0) \\ (a-b)x & (x < 0) \end{cases}$$

함수$f(x)$ 가 역함수를 가지려면
$f(x)$ 가 증가함수이거나 감소함수이어야 하므로
두 직선 $y = (a+b)x, y = (a-b)x$ 의 기울기의 부호가 같아야 한다.
$\therefore (a+b)(a-b) > 0, \quad a^2 - b^2 > 0$

3. 실수에서 정의된 함수 $f(x) = ax-3$ 에 대하여 $f^{-1} = f$ 가 성립하도록 하는 상수 a 의 값을 구하여라. (단, $a \neq 0$)

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

$f^{-1} = f$ 에서 $f^{-1}(x) = f(x)$, $f(f(x)) = x$

$f(f(x)) = f(ax-3) = a(ax-3)-3 = x$

모든 실수 x 에 대하여 성립하므로

$\therefore\ a^2 = 1,\ -3a-3 = 0$

$\therefore\ a = -1$

4. 두 함수 $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & (x \geq 2) \\ 2x + 1 & (x < 2) \end{cases}$, $g(x) = 3x - 1$ 에 대하여 $(f \circ g^{-1})(2)$ 의 값을 구하면?

① 0 ② 3 ③ 6 ④ 8 ⑤ 11

해설

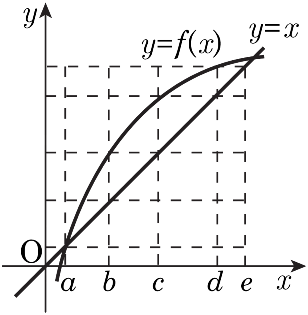
$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & (x \geq 2) \\ 2x + 1 & (x < 2) \end{cases}$, $g(x) = 3x - 1$ $g^{-1}(2) = a$ 라고 하면

$g(a) = 2, 3a - 1 = 2$

$\therefore\ a = 1$ 이므로 $(f \circ g^{-1})(2) = f(g^{-1}(2)) = f(1)$

$\therefore\ f(1) = 2 \cdot 1 + 1 = 3$ $(\because 1 < 2)$

5. 함수 $y=f(x)$ 의 역함수를 $y=g(x)$ 라 할 때, $y=f(x)$ 의 그래프를 이용하여 $g(a)+f(b)+f(c)-g(d)-g(e)$ 의 값을 구하면?



① a ② c

③ $a+b-c$ ④ $a+c-e$

⑤ $a+b+c-d-e$

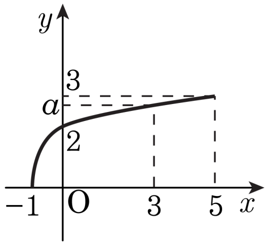
해설

$f(d)=e, f(c)=d, f(b)=c, f(a)=a$

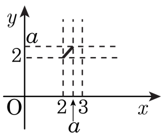
$\Rightarrow g(a)+f(b)+f(c)-g(d)-g(e)$

$\therefore\ a+c+d-c-d=a$

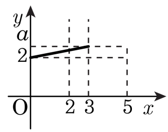
6. 실수 $-1 \le x \le 5$ 에서 정의된 함수 $y = f(x)$ 의 그래프가 아래 그림과 같다. 합성함수 $(f \circ f)(x)$ 의 그래프는?



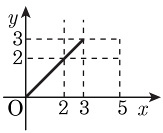
①



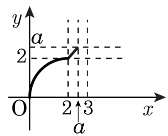
②



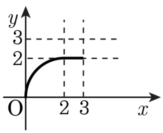
③



④



⑤



해설

실수 $-1 \le x \le 5$ 에서 정의된 함수 $y = f(x)$ 이므로 $(f \circ f)(x)$ 함수는 $f(f(x))$ 에서 $f(x)$ 의 치역을 정의역으로 하는 함수이다.
따라서 합성함수 $(f \circ f)(x)$ 는
$y = f(x)$ $(0 \le x \le 3)$ 가 되고 치역은 $2 \le y \le a$ 이다.

7. 두 함수 $f(x)=2x-1,\ g(x)=-x+2$ 의 역함수를 각각 $f^{-1},\ g^{-1}$ 라고 할 때, $\left(f\circ(f\circ g)^{-1}\circ f\right)(5)$ 의 값은?

① -1　　② -3　　③ -5　　④ -7　　⑤ -9

해설

$$\begin{aligned} f\circ(f\circ g)^{-1}\circ f &= f\circ\left(g^{-1}\circ f^{-1}\right)\circ f \\ &= f\circ g^{-1}\circ\left(f^{-1}\circ f\right) \\ &= f\circ g^{-1}\circ I \\ &= f\circ g^{-1} \end{aligned}$$

따라서, 구하는 값은 $\left(f\circ g^{-1}\right)(5)=f(g^{-1}(5))$

$g^{-1}(5)=k$ 로 놓으면 $g(k)=5$

$-k+2=5$ 에서 $k=-3$, 즉 $g^{-1}(5)=-3$

$\therefore f(g^{-1}(5))=f(-3)=2\times(-3)-1=-7$

8. 역함수가 존재하는 함수 $f(x)$ 에 대하여 $f^{-1}(3)=2$ 이고 $f(3x-4)=g(x)$ 라 할 때, $g^{-1}(3)$ 의 값은?

① 6 ② 5 ③ 4 ④ 3 ⑤ 2

해설

$g^{-1}(3)=k$ 라 하면 $g(k)=3$

$\therefore f(3k-4)=g(k)=3$

$f^{-1}(3)=3k-4=2$ 이므로 $k=2$

$\therefore g^{-1}(3)=2$

9. 함수 $f(x) = \frac{1}{2}x^2$ $(x \geq 0)$ 의 역함수를 $g(x)$ 라 할때, $y = f(x)$ 와 $y = g(x)$ 의 그래프의 두 교점 사이의 거리를 구하면?

① 2 ② $2\sqrt{2}$ ③ 3 ④ $2\sqrt{3}$ ⑤ $3\sqrt{2}$

해설

$x \geq 0$ 에서 $y = f(x)$ 의 그래프와
직선 $y = x$ 의 교점의 x 좌표를 구하면
$\frac{1}{2}x^2 = x$ 에서 $x^2 - 2x = 0$, $x(x-2) = 0$
$\therefore$ $x = 0$ 또는 $x = 2$
따라서 두 교점의 좌표가 $(0,\ 0)$, $(2,\ 2)$ 이므로
두 교점 사이의 거리는 $\sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$

10. 집합 $A = \{1, 2, 3, 4\}$ 에 대하여 함수 $f : A \to A$ 를

$$f(x) = \begin{cases} x - 1 & (x \geq 2) \\ 4 & (x = 1) \end{cases}$$ 로 정의한다.

이때, $f^{100}(1) - f^{100}(4)$ 의 값을 구하여라.
(단, $f^{n+1} = f \cdot f^n$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$)

▶ 답 :

▷ 정답 : -3

해설

주어진 함수는 2 이상의 숫자는 1을 빼주고,
1은 4로 대응시킴을 의미한다.
다음 그림처럼 f 를 계속 합성하면
4번째에는 모든 원소가 자기자신으로 대응한다.
$\therefore f^4(x) = x$
$\therefore f^{100}(x) = f^{96}(x) = f^{92}(x) = \cdots = f^4(x) = x$
$\therefore f^{100}(1) - f^{100}(4) = 1 - 4 = -3$