

1. 두 집합 $X = \{a, b, c\}$, $Y = \{p, q, r, s\}$ 가 있다. X 에서 Y 로의 일대일 함수는 모두 몇 개인지 구하여라.

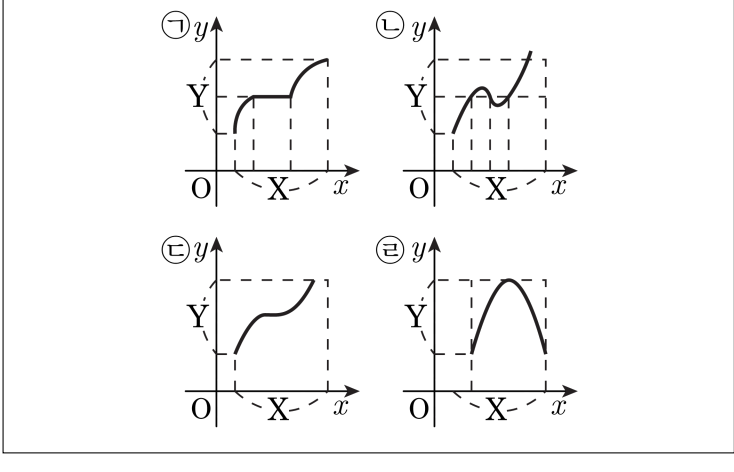
▶ 답 : 개

▷ 정답 : 24개

해설

a 에 대응하는 수가 b 에 대응해서는 안 되고
 a, b 에 대응하는 수가 c 에 대응해서는 안 되므로
 $\therefore 4 \times 3 \times 2 = 24$ (개)

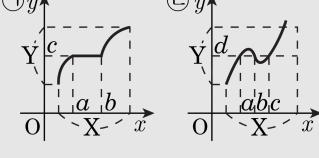
2. 함수 $f: X \rightarrow Y$ 의 그래프가 다음과 같다고 한다. 이 중에서 역함수가 존재하는 것은?



- ① ㉠, ㉢
 ② ㉡, ㉣
 ③ ㉢
- ④ ㉠
 ⑤ ㉠, ㉡, ㉣

해설

X 에서 Y 로의 일대일대응을 찾으면 된다.



- ㉠ : $\{x|a \leq x \leq b\}$ 에 속하는 x 의 상이 모두 c 이므로 일대일대응이 아니다.
- ㉡ : a, b, c 의 상이 모두 d 이므로 일대일대응이 아니다.
- ㉢ : ㉡의 경우와 같다.

3. 함수 $y = |x - 3| - 1$ 에 대하여 $0 \leq x \leq 4$ 일 때, 이 함수의 최댓값과 최솟값을 차례대로 구하면?

① 2, 1

② 2, 0

③ 2, -1

④ 1, -1

⑤ 1, -2

해설

$0 \leq x \leq 4$ 에서

$$y = |x - 3| - 1$$

$$= \begin{cases} x - 4 & (3 \leq x \leq 4) \\ -x + 2 & (0 \leq x < 3) \end{cases}$$

따라서, 위 함수의 그래프는 다음 그림

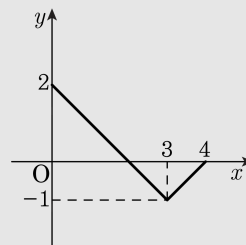
과 같으므로

$x = 0$ 일 때

최댓값은 2이고

$x = 3$ 일 때

최솟값은 -1이다.



4. 두 곡선 $y = \sqrt{x+1}$, $x = \sqrt{y+1}$ 의 교점의 좌표를 구하면?

① $\left(\frac{1+\sqrt{5}}{3}, \frac{1+\sqrt{5}}{3}\right)$

② $\left(\frac{2+\sqrt{5}}{2}, \frac{2+\sqrt{5}}{2}\right)$

③ $\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$

④ $\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}, \frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)$

⑤ $\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}, \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)$

해설

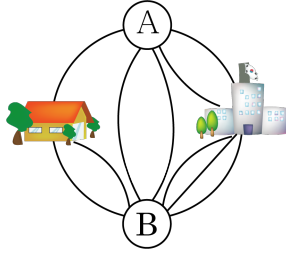
두 곡선 $y = \sqrt{x+1}$ 과 $x = \sqrt{y+1}$ 은

직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이므로

$y = \sqrt{x+1}$ 과 $y = x$ 의 교점을 구하면 된다.

$\therefore \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$

5. 집과 학교 사이에는 그림과 같이 길이 놓여 있을 때, 집에서 학교로 가는 방법의 수는? (단, 같은 지점을 두 번 지나지 않는다.)



- ① 22 ② 34 ③ 47 ④ 54 ⑤ 66

해설

- (1) 집→A→학교 : $1 \times 2 = 2$
(2) 집→B→학교 : $2 \times 3 = 6$
(3) 집→A→B→학교 : $1 \times 2 \times 3 = 6$
(4) 집→B→A→학교 : $2 \times 2 \times 2 = 8$
∴ $2 + 6 + 6 + 8 = 22$

6. 1, 2, 3 으로 만들 수 있는 세 자리의 자연수는 27 개가 있다. 이 중에서 다음 규칙을 만족시키는 세 자리의 자연수의 개수를 구하여라.
- (가) 1 바로 다음에는 3 이다.
 - (나) 2 바로 다음에는 1 또는 3 이다.
 - (다) 3 바로 다음에는 1, 2 또는 3 이다.

▶ 답 : 가지

▷ 정답 : 13 가지

해설

조건에 맞는 세 자리수는 131, 132, 133, 213, 231, 232, 233, 313, 321, 323, 331, 332 ,333 이므로 13 가지이다.

7. ‘busan’의 모든 문자를 써서 만든 순열 중 양끝이 모두 모음인 것의 개수를 구하여라.

▶ 답 : 개

▷ 정답 : 12 개

해설

자음 3개를 배열하고, 양 끝에 모음 u, a를 배치하면 된다.
 $3! \times 2! = 12$

8. 집합 $X = \{-1, 0, 1\}$ 에 대하여 X 에서 X 로의 함수 f 에 대한 설명으로 옳은 것을 <보기>에서 모두 고른 것은?

보기

- ㉠ $f(x) = |x|$ 이면 $f(-1) = f(1)$ 이다.
- ㉡ $f(x) = x^3 - x$ 의 치역은 $\{0\}$ 이다.
- ㉢ $f(x) = x^3$ 은 일대일대응이다.

- ① ㉠

② ㉠, ㉡

③ ㉠, ㉢

④ ㉡, ㉢

⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

- ㉠ $f(x) = |x|$ 이면 $f(-1) = f(1) = 1$
- ㉡ $f(-1) = -1 + 1, f(0) = 0 - 0, f(1) = 1 - 1$
그러므로 $f(x) = x^3 - x$ 의 치역은 $\{0\}$
- ㉢ $f(-1) = -1, f(0) = 0, f(1) = 1$
그러므로 $f(x) = x^3$ 은 일대일대응

9. 유리함수 $f(x) = \frac{3x-2}{x-2}$ 에 대하여 이 함수 $y = f(x)$ 의 역함수를 $y = f^{-1}(x)$ 라 하자. 이 때, $y = f(x)$ 와 $y = f^{-1}(x)$ 의 교점의 개수를 구하면?

- ① 0개 ② 1개 ③ 2개
④ 3개 ⑤ 무수히 많다.

해설

$y = f(x)$ 와 $y = f^{-1}(x)$ 의 교점은

$y = f(x)$ 와 $y = x$ 의 교점과 같다.

$$\Rightarrow x = \frac{3x-2}{x-2}$$

$$\Rightarrow x^2 - 5x + 2 = 0$$

$D > 0$ 이므로 교점은 2개이다.

10. $x = \sqrt{6 - \sqrt{20}}$ 에 대하여 x 의 정수 부분을 a , 소수 부분을 b 라 할 때,
 $x + a - \frac{1}{b}$ 의 값을 구하시오.

▶ 답 :

▷ 정답 : -2

해설

$$\begin{aligned}x &= \sqrt{6 - \sqrt{20}} = \sqrt{6 - 2\sqrt{5}} \\&= \sqrt{5} - 1 = 1.\times\times\times \\ \text{정수 부분 } a &= 1, \text{ 소수 부분 } b = x - a = \sqrt{5} - 2 \\x + a - \frac{1}{b} &= \sqrt{5} - 1 + 1 - \frac{1}{\sqrt{5} - 2} \\&= \sqrt{5} - (\sqrt{5} + 2) = -2\end{aligned}$$

11. $x = \sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}$, $y = \sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}$ 일 때, $\frac{x-y}{x+y} + \frac{x+y}{x-y}$ 의 값을 구하면?

- ① $\frac{6\sqrt{5}}{5}$ ② $\sqrt{5}$ ③ $\frac{4\sqrt{5}}{5}$ ④ $\frac{3\sqrt{5}}{5}$ ⑤ $\frac{2\sqrt{5}}{5}$

해설

$$x = \sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}} = \sqrt{\frac{6+2\sqrt{5}}{4}} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$$

$$y = \sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}} = \sqrt{\frac{6-2\sqrt{5}}{4}} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

$$\therefore x+y = \sqrt{5}, \quad x-y = 1$$

$$\therefore \frac{x-y}{x+y} + \frac{x+y}{x-y} = \frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{\sqrt{5}}{1} = \frac{6\sqrt{5}}{5}$$

12. 1부터 72까지의 자연수 중에서 72와 서로소인 수의 개수를 구하여라.

▶ 답 : 개

▷ 정답 : 24 개

해설

$$72 = 2^3 \times 3^2$$

72와 서로소는 2의 배수도 아니고, 3의 배수도 아닌 것

$$\therefore 72 - (36 + 24 - 12) = 24$$

$$\therefore 24 \text{ 개}$$

13. 식 $(a+b+c)(x+y+z)$ 를 전개하였을 때, 항의 개수는?

① 6

② 9

③ 12

④ 15

⑤ 18

해설

a, b, c 가 선택할 수 있는 항이 각각 3 가지씩 있으므로 $3+3+3=9$

14. 180의 양의 약수 중 3의 배수의 개수는?

- ① 10 ② 12 ③ 14 ④ 16 ⑤ 18

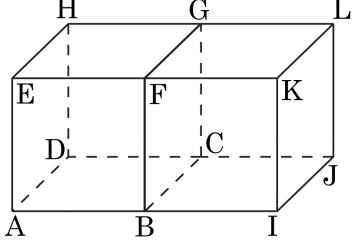
해설

$180 = 3 \times 60$ 따라서 60의 약수의 개수를 구하면 된다.

$60 = 2^2 \times 3 \times 5$ 이므로

약수의 개수 : $(2 + 1) \times (1 + 1) \times (1 + 1) = 12$

15. 두 개의 정육면체가 서로 붙어 있는 아래 그림에서 A 에서부터 L 까지 모서리를 따라 최단 거리로 가는 방법 중 B 를 통과하지 않는 방법의 수를 구하면?



- ① 4 ② 6 ③ 8 ④ 12 ⑤ 16

해설

A

D

E

C

F

J—L

G—L

H—G—L

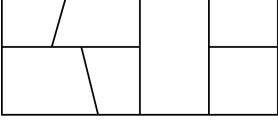
K—L

G—L

H—G—L

위의 수형도에서 구하는 방법의 수는 6 가지이다.

17. 빨강, 주황, 노랑, 초록, 파랑의 5 가지 색을 사용하여 다음 그림과 같은 도형의 각 면을 색칠하려고 한다. 변의 일부 또는 전부를 공유하는 두 면은 같은 색을 사용하지 않도록 할 때, 모든 면을 색칠하는 방법의 수는?



- ① 4020 ② 5160 ③ 6480 ④ 7260 ⑤ 8400

해설

e / b		f
d \ c	a	g

a 에 색칠하는 방법의 수는 5 가지
 b 에 색칠하는 방법의 수는 4 가지
 c 에 색칠하는 방법의 수는 3 가지
 d 에 색칠하는 방법의 수는 3 가지
 e 에 색칠하는 방법의 수는 3 가지이므로
 a, b, c, d, e 에 색칠하는 방법의 수는
 $5 \times 4 \times 3 \times 3 \times 3 = 540$ (가지)
 f 에 색칠하는 방법의 수는 4 가지
 g 에 색칠하는 방법의 수는 3 가지 이므로
 f, g 에 색칠하는 방법의 수는 $4 \times 3 = 12$ (가지)
따라서 구하는 방법의 수는
 $540 \times 12 = 6480$ (가지)

18. 남학생 4 명, 여학생 6 명 중에서 반장 1 명, 부반장 1 명을 뽑을 때, 반장, 부반장이 모두 남자인 경우의 수를 구하여라.

▶ 답 : 가지

▷ 정답 : 12가지

해설

$${}_4P_2 = 12$$

19. 일차 이하의 다항함수 $y = f(x)$ 가 다음 세 조건을 만족한다.

- I. $f(0) \leq f(1)$
II. $f(2) \geq f(3)$
III. $f(1) = 1$

이 때, 다음 중 옳은 것을 모두 고르면?

- < 보기 >
- $\textcircled{\tiny \neg}$ $f(2) = 1$

$\textcircled{\tiny \sqcup}$ $f(3) = 3f(1)$
- $\textcircled{\tiny \sqsubset}$ $f(-1) > f(1)$

- $\textcircled{1} \textcircled{\tiny \neg}$

$\textcircled{2} \textcircled{\tiny \sqcup}$

$\textcircled{3} \textcircled{\tiny \neg}, \textcircled{\tiny \sqcup}$
- $\textcircled{4} \textcircled{\tiny \neg}, \textcircled{\tiny \sqsubset}$

$\textcircled{5} \textcircled{\tiny \neg}, \textcircled{\tiny \sqcup}, \textcircled{\tiny \sqsubset}$

해설

일차 이하의 다항함수 중
조건 I, II를 만족하는함수는
상수함수이므로 조건 III에 의하여 $f(x) = 1$ 이다.
따라서 옳은 것은 $\textcircled{\tiny \neg}$ 뿐이다.

20. 함수 $f(x) = x + 3$ 에 대하여 $f^1 = f$, $f^{n+1} = f \circ f^n (n = 1, 2, 3, \dots)$ 으로 정의할 때, $f^{100}(100)$ 의 값은?

① 300 ② 400 ③ 500 ④ 600 ⑤ 700

해설

$f^1(x) = x + 3$
 $f^2(x) = f(f^1(x)) = f(x + 3) = x + 6$
 $f^3(x) = f(f^2(x)) = f(x + 6) = x + 9$
 $\vdots$ 이므로
 $f^n(x) = x + 3n (n = 1, 2, 3, \dots)$ 으로
추정할 수 있다.
따라서, $f^{100}(x) = x + 300$ 이므로
 $f^{100}(100) = 100 + 300 = 400$

21. 두 함수 $f(x) = x + 1$, $g(x) = \sqrt{x}$ 에 대하여 $(f \circ (g \circ f)^{-1} \circ f)(2)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

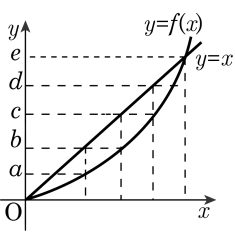
▷ 정답 : 9

해설

$$\begin{aligned} g^{-1}(x) &= x^2 \text{ 이므로} \\ (f \circ (g \circ f)^{-1} \circ f)(2) &= (f \circ f^{-1} \circ g^{-1} \circ f)(2) \\ &= (g^{-1} \circ f)(2) \\ &= g^{-1}(f(2)) \\ &= g^{-1}(3) \\ &= 9 \end{aligned}$$

22. 다음 그림은 두 함수 $y = f(x)$ 와 $y = x$ 의 그래프이다. $(f \circ f)^{-1}(b)$ 의 값은?

- ① a ② b ③ c ④ d ⑤ e



해설

$$(f \circ f)^{-1}(b) = (f^{-1} \circ f^{-1})(b) = f^{-1}(f^{-1}(b))$$

$$f^{-1}(b) = k \text{라고 하면, } f(k) = b$$

$$\therefore k = c \quad \therefore f^{-1}(f^{-1}(b)) = f^{-1}(c)$$

$$\text{또, } f^{-1}(c) = t \text{라고 하면, } f(t) = c$$

$$\therefore t = d \quad \therefore (f \circ f)^{-1}(b) = d$$

23. $0 < a < 1$ 이고 $x = a + \frac{1}{a}$ 일 때, $\sqrt{x^2 - 4} + x$ 를 a 로 나타내면?

- ① $2a$ ② $\frac{2}{a}$ ③ $-\frac{2}{a}$ ④ $-2a$ ⑤ 0

해설

$$\begin{aligned}\sqrt{x^2 - 4} + x &= \sqrt{\left(a + \frac{1}{a}\right)^2 - 4} + a + \frac{1}{a} \\&= \sqrt{\left(a - \frac{1}{a}\right)^2} + a + \frac{1}{a} \\&= -\left(a - \frac{1}{a}\right) + a + \frac{1}{a} = \frac{2}{a} \\&\left(\because 0 < a < 1 \text{ 일 때, } a < \frac{1}{a}\right)\end{aligned}$$

24. $\left(\frac{1}{x}\right)^2 = 7 + 2\sqrt{12}$, $\left(\frac{1}{y}\right)^2 = 7 - 2\sqrt{12}$ 을 만족하는 두 양수 x, y 에 대하여, $x^3 + y^3$ 의 값을 구하시오.

▶ 답 :

▷ 정답 : 52

해설

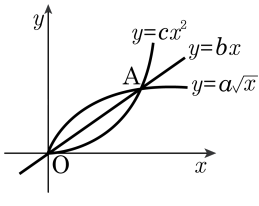
$$\left(\frac{1}{x}\right)^2 = 7 + 2\sqrt{12}, \frac{1}{x} = \sqrt{3} + 2, x = 2 - \sqrt{3}$$

$$\left(\frac{1}{y}\right)^2 = 7 - 2\sqrt{12}, \frac{1}{y} = 2 - \sqrt{3}, y = 2 + \sqrt{3}$$

$$x + y = 4, xy = 1$$

$$x^3 + y^3 = (x + y)^3 - 3xy(x + y) = 64 - 12 = 52$$

25. 양의 상수 a, b, c 에 대하여 세 함수 $y = a\sqrt{x}$, $y = bx$, $y = cx^2$ 의 그래프가 그림과 같이 원점 O와 다른 점 A에서 동시에 만날 때, a, b, c 의 관계로 옳은 것은?



- ① $a^3 = b^2c$ ② $a^3 = bc^2$ ③ $b^3 = a^2c$
 ④ $b^3 = ac^2$ ⑤ $c^3 = a^2b$

해설

곡선 $y = cx^2$ 과 $y = bx$ 의 교점의 x 좌표 (단, $x \neq 0$)는 $cx^2 = bx$

$$\therefore x = \frac{b}{c}$$

곡선 $y = a\sqrt{x}$ 와 $y = bx$ 의 교점의 x 좌표 (단, $x \neq 0$)는

$$a\sqrt{x} = bx \therefore x = \frac{a^2}{b^2}$$

두 점이 일치하므로 $\frac{b}{c} = \frac{a^2}{b^2}$

$$\therefore b^3 = a^2c$$

26. 여섯 개의 알파벳 I, L, O, V, E, U 를 일렬로 배열할 때, 적어도 네 개의 알파벳 L, O, V, E 가 이웃하여 $LOVE$ 로 나타나지 않는 경우의 수를 구하여라.

▶ 답 : 가지

▷ 정답 : 714 가지

해설

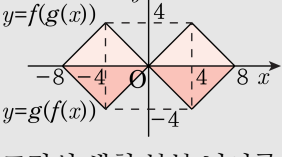
6 개의 알파벳을 일렬로 배열하는 방법의 수는 $6!$ 이고 L, O, V, E 을 묶어 일렬로 나열하는 방법의 수, 즉 $LOVE$ 가 나타나는 경우의 수는 $3!$ 이므로 구하는 경우의 수는 $6! - 3! = 720 - 6 = 714$

27. 함수 $f(x) = 4 - |x|$, $g(x) = -4 + |x|$ 에서, $y = f(g(x))$ 와 $y = g(f(x))$ 로 둘러싸여있는 영역의 넓이는?

- ① 36 ② 64 ③ 72 ④ 54 ⑤ 108

해설

i) $y = f(g(x)) = 4 - |-4 + |x||$ 에서
 $x \geq 4$ 일 때, $y = 4 - (-4 + x) = -x + 8$
 $0 \leq x < 4$ 일 때, $y = 4 + (-4 + x) = x$
 $-4 \leq x < 0$ 일 때, $y = 4 + (-4 - x) = -x$
 $x < -4$ 일 때, $y = 4 - (-4 - x) = x + 8$
ii) $y = g(f(x)) = -4 + |4 - |x||$ 에서
 $x \geq 4$ 일 때, $y = -4 - (4 - x) = x - 8$
 $0 \leq x < 4$ 일 때, $y = -4 + (4 - x) = -x$
 $-4 \leq x < 0$ 일 때, $y = -4 + (4 + x) = x$
 $x < -4$ 일 때, $y = -4 - (4 + x) = -x - 8$



그림의 색칠 부분 넓이를 계산하면
 $\therefore 8 \times 8 = 64$