1. 두 집합 $X=\{a,b,c\}$, $Y=\{p,q,r,s\}$가 있다. X에서 Y로의 일대일 함수는 모두 몇 개인지 구하여라.

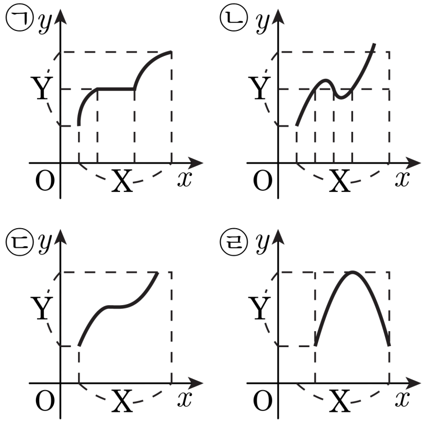
▶ 답: ____________ 개

▷ 정답: 24 개

해설

a에 대응하는 수가 b에 대응해서는 안 되고
a, b에 대응하는 수가 c에 대응해서는 안되므로
$\therefore 4\times3\times2=24$(개)

2. 함수 $f : X \to Y$ 의 그래프가 다음과 같다고 한다. 이 중에서 역함수가 존재하는 것은?

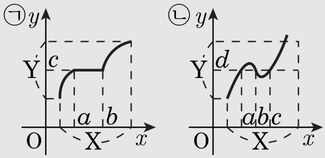


① ㉠, ㉢　　② ㉡, ㉣　　③ ㉢

④ ㉠　　⑤ ㉠, ㉡, ㉣

해설

X 에서 Y 로의 일대일대응을 찾으면 된다.



㉠ : $\{x | a \leq x \leq b\}$ 에 속하는 x 의 상이 모두 c 이므로 일대일대응이 아니다.

㉡ : a, b, c 의 상이 모두 d 이므로 일대일 대응이 아니다.

㉣ : ㉡의 경우와 같다.

3. 함수 $y = |x-3| - 1$ 에 대하여 $0 \le x \le 4$ 일 때, 이 함수의 최댓값과 최솟값을 차례대로 구하면?

① 2, 1　　② 2, 0　　③ 2, -1

④ 1, -1　　⑤ 1, -2

해설

$0 \le x \le 4$ 에서

$y = |x-3| - 1$

$$= \begin{cases} x-4 & (3 \le x \le 4) \\ -x+2 & (0 \le x < 3) \end{cases}$$

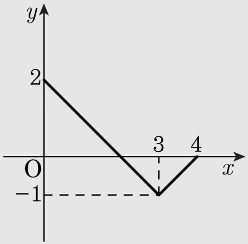
따라서, 위 함수의 그래프는 다음 그림과 같으므로

$x = 0$ 일 때

최댓값은 2 이고

$x = 3$ 일 때

최솟값은 -1 이다.



4. 두 곡선 $y = \sqrt{x+1}$, $x = \sqrt{y+1}$ 의 교점의 좌표를 구하면?

① $\left(\frac{1+\sqrt{5}}{3}, \frac{1+\sqrt{5}}{3}\right)$ ② $\left(\frac{2+\sqrt{5}}{2}, \frac{2+\sqrt{5}}{2}\right)$

③ $\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$ ④ $\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}, \frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)$

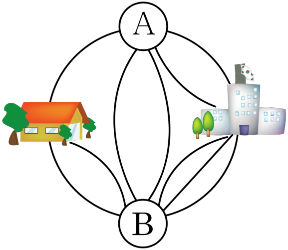
⑤ $\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}, \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)$

해설

두 곡선 $y = \sqrt{x+1}$ 과 $x = \sqrt{y+1}$은
직선 $y = x$에 대하여 대칭이므로
$y = \sqrt{x+1}$ 과 $y = x$ 의 교점을 구하면 된다.

$\therefore \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$

5. 집과 학교 사이에는 그림과 같이 길이 놓여 있을 때, 집에서 학교로 가는 방법의 수는? (단, 같은 지점을 두 번 지나지 않는다.)



① 22 ② 34 ③ 47 ④ 54 ⑤ 66

해설

(1) 집 $\rightarrow A \rightarrow$ 학교 : $1 \times 2 = 2$

(2) 집 $\rightarrow B \rightarrow$ 학교 : $2 \times 3 = 6$

(3) 집 $\rightarrow A \rightarrow B \rightarrow$ 학교 : $1 \times 2 \times 3 = 6$

(4) 집 $\rightarrow B \rightarrow A \rightarrow$ 학교 : $2 \times 2 \times 2 = 8$

$\therefore\ 2 + 6 + 6 + 8 = 22$

6. $1, 2, 3$ 으로 만들 수 있는 세 자리의 자연수는 27개가 있다. 이 중에서 다음 규칙을 만족시키는 세 자리의 자연수의 개수를 구하여라.

(가) 1 바로 다음에는 3 이다.

(나) 2 바로 다음에는 1 또는 3 이다.

(다) 3 바로 다음에는 1 , 2 또는 3 이다.

▶ **답 :** ______ 가지

▷ **정답 :** 13 가지

해설

조건에 맞는 세 자리수는 131, 132, 133, 213, 231, 232, 233, 313, 321, 323, 331, 332 ,333 이므로 13 가지이다.

7. 'busan'의 모든 문자를 써서 만든 순열 중 양끝이 모두 모음인 것의 개수를 구하여라.

▶ **답 :** ______ 개

▷ **정답 :** 12 개

해설

자음 3개를 배열하고, 양 끝에 모음 u, a를 배치하면 된다.

$3! \times 2! = 12$

8. 집합 $X = \{-1, 0, 1\}$ 에 대하여 X 에서 X 로의 함수 f 에 대한 설명으로 옳은 것을 <보기> 에서 모두 고른 것은?

보기

㉠ $f(x) = |x|$ 이면 $f(-1) = f(1)$ 이다.

㉡ $f(x) = x^3 - x$ 의 치역은 $\{0\}$ 이다.

㉢ $f(x) = x^3$ 은 일대일대응이다.

① ㉠ ② ㉠, ㉡ ③ ㉠, ㉢

④ ㉡, ㉢ ⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

㉠ $f(x) = |x|$ 이면 $f(-1) = f(1) = 1$

㉡ $f(-1) = -1 + 1, f(0) = 0 - 0, f(1) = 1 - 1$

그러므로 $f(x) = x^3 - x$ 의 치역은 $\{0\}$

㉢ $f(-1) = -1, f(0) = 0, f(1) = 1$

그러므로 $f(x) = x^3$ 은 일대일대응

9. 유리함수 $f(x) = \dfrac{3x-2}{x-2}$ 에 대하여 이 함수 $y = f(x)$ 의 역함수를 $y = f^{-1}(x)$ 라 하자. 이 때, $y = f(x)$ 와 $y = f^{-1}(x)$ 의 교점의 개수를 구하면?

① 0개 ② 1개 ③ 2개

④ 3개 ⑤ 무수히 많다.

해설

$y = f(x)$ 와 $y = f^{-1}(x)$ 의 교점은
$y = f(x)$ 와 $y = x$ 의 교점과 같다.

$$\Rightarrow x = \frac{3x-2}{x-2}$$
$$\Rightarrow x^2 - 5x + 2 = 0$$

$D > 0$ 이므로 교점은 2개이다.

10. $x = \sqrt{6-\sqrt{20}}$에 대하여 x의 정수 부분을 a, 소수 부분을 b라 할 때, $x+a-\dfrac{1}{b}$의 값을 구하시오.

▶ 답 :

▷ 정답 : -2

해설

$x = \sqrt{6-\sqrt{20}} = \sqrt{6-2\sqrt{5}}$

$= \sqrt{5}-1 = 1.\times\times\times$

정수 부분 $a = 1$, 소수 부분 $b = x-a = \sqrt{5}-2$

$x+a-\dfrac{1}{b} = \sqrt{5}-1+1-\dfrac{1}{\sqrt{5}-2}$

$= \sqrt{5}-(\sqrt{5}+2) = -2$

11. $x=\sqrt{\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}}$, $y=\sqrt{\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}}$ 일 때, $\dfrac{x-y}{x+y}+\dfrac{x+y}{x-y}$ 의 값을 구하면?

① $\dfrac{6\sqrt{5}}{5}$ ② $\sqrt{5}$ ③ $\dfrac{4\sqrt{5}}{5}$ ④ $\dfrac{3\sqrt{5}}{5}$ ⑤ $\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$

해설

$$x=\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}=\sqrt{\frac{6+2\sqrt{5}}{4}}=\frac{\sqrt{5}+1}{2}$$

$$y=\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}=\sqrt{\frac{6-2\sqrt{5}}{4}}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

$$\therefore x+y=\sqrt{5},\ x-y=1$$

$$\therefore \frac{x-y}{x+y}+\frac{x+y}{x-y}=\frac{1}{\sqrt{5}}+\frac{\sqrt{5}}{1}=\frac{6\sqrt{5}}{5}$$

12. 1부터 72까지의 자연수 중에서 72와 서로소인 수의 개수를 구하여라.

▶ 답 : ____ 개

▷ 정답 : 24 개

해설

$72 = 2^3 \times 3^2$

72와 서로소는 2의 배수도 아니고, 3의 배수도 아닌 것

$\therefore\ 72 - (36 + 24 - 12) = 24$

$\therefore$ 24개

13. 식 $(a+b+c)(x+y+z)$ 를 전개하였을 때, 항의 개수는?

① 6　② 9　③ 12　④ 15　⑤ 18

해설

a, b, c 가 선택할 수 있는 항이 각각 3 가지씩 있으므로 $3+3+3=9$

14. 180 의 양의 약수 중 3 의 배수의 개수는?

① 10 ② 12 ③ 14 ④ 16 ⑤ 18

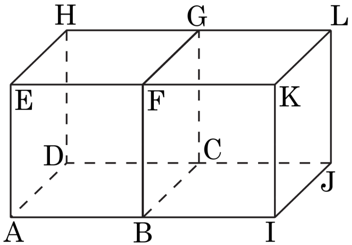
해설

$180 = 3 \times 60$ 따라서 60 의 약수의 개수를 구하면 된다.

$60 = 2^2 \times 3 \times 5$ 이므로

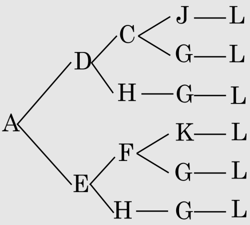
약수의 개수 : $(2+1) \times (1+1) \times (1+1) = 12$

15. 두 개의 정육면체가 서로 붙어 있는 아래 그림에서 A 에서부터 L 까지 모서리를 따라 최단 거리로 가는 방법 중 B 를 통과하지 않는 방법의 수를 구하면?



① 4 ② 6 ③ 8 ④ 12 ⑤ 16

해설



위의 수형도에서 구하는 방법의 수는 6 가지이다.

16. 100 원짜리 1 개, 50 원짜리 2 개, 10 원짜리 3 개가 있다. 일부 또는 전부를 사용하여 거스름돈 없이 지불할 때, 지불 방법의 수와 지불할 수 있는 금액의 수의 합을 구하여라.

▶ 답 : ______ 가지

▷ 정답 : 42 가지

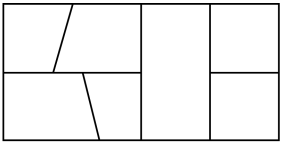
해설

① 100 원짜리 동전을 0 개, 1 개 사용할 수 있다. 2 가지
50 원짜리 동전을 0, 1, 2 개 사용할 수 있다. 3 가지
10 원짜리 동전을 0, 1, 2, 3 개 사용할 수 있다. 4 가지
따라서 지불 방법의 수는 $2 \times 3 \times 4 = 24$ 인데 이 중에서 0 개를 사용하는 것은 지불하는것이 아니므로 제외하면 23 가지의 지불 방법 수가 있다.

② 100 원짜리 동전을 50 원짜리 동전으로 교환하면 50 원짜리 동전이 4 개, 10 원짜리 동전이 3 개인 상황에서 지불 금액의 수는 $5 \times 4 = 20$ 가지 인데 이 중에서 서로 사용하지 않는 경우를 제외하면 19 가지이다.

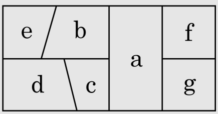
①, ②에서 구하는 지불 방법의 수와 지불할 수 있는 금액의 수의 합은 $23+19=42$

17. 빨강, 주황, 노랑, 초록, 파랑의 5 가지 색을 사용하여 다음 그림과 같은 도형의 각 면을 색칠하려고 한다. 변의 일부 또는 전부를 공유하는 두 면은 같은 색을 사용하지 않도록 할 때, 모든 면을 색칠하는 방법의 수는?



① 4020　　② 5160　　③ 6480　　④ 7260　　⑤ 8400

해설



a 에 색칠하는 방법의 수는 5 가지
b 에 색칠하는 방법의 수는 4 가지
c 에 색칠하는 방법의 수는 3 가지
d 에 색칠하는 방법의 수는 3 가지
e 에 색칠하는 방법의 수는 3 가지이므로
a, b, c, d, e 에 색칠하는 방법의 수는
$5 \times 4 \times 3 \times 3 \times 3 = 540$ (가지)
f 에 색칠하는 방법의 수는 4 가지
g 에 색칠하는 방법의 수는 3 가지 이므로
f, g 에 색칠하는 방법의 수는 $4 \times 3 = 12$ (가지)
따라서 구하는 방법의 수는
$540 \times 12 = 6480$ (가지)

18. 남학생 4 명, 여학생 6 명 중에서 반장 1 명, 부반장 1 명을 뽑을 때, 반장, 부반장이 모두 남자인 경우의 수를 구하여라.

▶ **답 :** ______ 가지

▷ **정답 :** 12 가지

해설

$_4P_2 = 12$

19. 일차 이하의 다항함수 $y = f(x)$ 가 다음 세 조건을 만족한다.

Ⅰ. $f(0) \le f(1)$
Ⅱ. $f(2) \ge f(3)$
Ⅲ. $f(1) = 1$

이 때, 다음 중 옳은 것을 모두 고르면?

< 보기>

㉠ $f(2) = 1$ ㉡ $f(3) = 3f(1)$

㉢ $f(-1) > f(1)$

① ㉠ ② ㉡ ③ ㉠, ㉡

④ ㉠, ㉢ ⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

일차 이하의 다항함수 중
조건 Ⅰ, Ⅱ를 만족하는함수는
상수함수이므로 조건 Ⅲ에 의하여 $f(x) = 1$ 이다.
따라서 옳은 것은 ㉠뿐이다.

20. 함수 $f(x)=x+3$ 에 대하여 $f^1=f,\ f^{n+1}=f\circ f^n(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ 으로 정의할 때, $f^{100}(100)$ 의 값은?

① 300 ② 400 ③ 500 ④ 600 ⑤ 700

해설

$f^1(x)=x+3$
$f^2(x)=f(f^1(x))=f(x+3)=x+6$
$f^3(x)=f(f^2(x))=f(x+6)=x+9$

$\vdots$ 이므로

$f^n(x)=x+3n(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ 으로 추정할 수 있다.

따라서, $f^{100}(x)=x+300$ 이므로

$f^{100}(100)=100+300=400$

21. 두 함수 $f(x) = x + 1,\ g(x) = \sqrt{x}$ 에 대하여 $(f \circ (g \circ f)^{-1} \circ f)(2)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

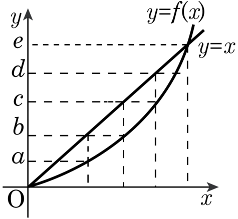
▷ 정답 : 9

해설

$g^{-1}(x) = x^2$ 이므로

$$\begin{aligned}(f \circ (g \circ f)^{-1} \circ f)(2) &= (f \circ f^{-1} \circ g^{-1} \circ f)(2) \\ &= (g^{-1} \circ f)(2) \\ &= g^{-1}(f(2)) \\ &= g^{-1}(3) \\ &= 9\end{aligned}$$

22. 다음 그림은 두 함수 $y = f(x)$와 $y = x$의 그래프이다. $(f \circ f)^{-1}(b)$의 값은?



① a　② b　③ c　④ d　⑤ e

해설

$(f \circ f)^{-1}(b) = (f^{-1} \circ f^{-1})(b) = f^{-1}(f^{-1}(b))$

$f^{-1}(b) = k$라고 하면, $f(k) = b$

$\therefore\ k = c$　　$\therefore\ f^{-1}(f^{-1}(b)) = f^{-1}(c)$

또, $f^{-1}(c) = t$라고 하면, $f(t) = c$

$\therefore\ t = d$　　$\therefore\ (f \circ f)^{-1}(b) = d$

23. $0 < a < 1$이고 $x = a + \frac{1}{a}$일 때, $\sqrt{x^2 - 4} + x$를 a로 나타내면?

① $2a$　② $\frac{2}{a}$　③ $-\frac{2}{a}$　④ $-2a$　⑤ 0

해설

$$\sqrt{x^2 - 4} + x = \sqrt{\left(a + \frac{1}{a}\right)^2 - 4} + a + \frac{1}{a}$$

$$= \sqrt{\left(a - \frac{1}{a}\right)^2} + a + \frac{1}{a}$$

$$= -\left(a - \frac{1}{a}\right) + a + \frac{1}{a} = \frac{2}{a}$$

$\left(\because 0 < a < 1\text{일 때, } a < \frac{1}{a}\right)$

24. $\left(\frac{1}{x}\right)^2 = 7+2\sqrt{12}$, $\left(\frac{1}{y}\right)^2 = 7-2\sqrt{12}$을 만족하는 두 양수 x, y에 대하여, x^3+y^3의 값을 구하시오.

▶ 답 :

▷ 정답 : 52

해설

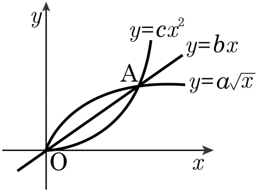
$$\left(\frac{1}{x}\right)^2 = 7+2\sqrt{12},\ \frac{1}{x} = \sqrt{3}+2,\ x = 2-\sqrt{3}$$

$$\left(\frac{1}{y}\right)^2 = 7-2\sqrt{12},\ \frac{1}{y} = 2-\sqrt{3},\ y = 2+\sqrt{3}$$

$$x+y = 4,\ \ xy = 1$$

$$x^3+y^3 = (x+y)^3 - 3xy(x+y) = 64-12 = 52$$

25. 양의 상수 a, b, c에 대하여 세 함수 $y = a\sqrt{x}$, $y = bx$, $y = cx^2$의 그래프가 그림과 같이 원점 O와 다른 점 A에서 동시에 만날 때, a, b, c의 관계로 옳은 것은?



① $a^3 = b^2c$　② $a^3 = bc^2$　③ $b^3 = a^2c$

④ $b^3 = ac^2$　⑤ $c^3 = a^2b$

해설

곡선 $y = cx^2$과 $y = bx$의 교점의 x좌표 (단, $x \neq 0$)는 $cx^2 = bx$

$\therefore\ x = \dfrac{b}{c}$

곡선 $y = a\sqrt{x}$와 $y = bx$의 교점의 x좌표(단, $x \neq 0$)는

$a\sqrt{x} = bx$ $\therefore\ x = \dfrac{a^2}{b^2}$

두 점이 일치하므로 $\dfrac{b}{c} = \dfrac{a^2}{b^2}$

$\therefore\ b^3 = a^2c$

26. 여섯 개의 알파벳 I, L, O, V, E, U 를 일렬로 배열할 때, 적어도 네 개의 알파벳 L, O, V, E가 이웃하여 $LOVE$ 로 나타나지 <u>않는</u> 경우의 수를 구하여라.

▶ 답 : ________ 가지

▷ 정답 : 714 가지

해설

6 개의 알파벳을 일렬로 배열하는 방법의 수는 $6!$ 이고 L, O, V, E 을 묶어 일렬로 나열하는 방법의 수,
즉 $LOVE$ 가 나타나는 경우의 수는 $3!$ 이므로
구하는 경우의 수는 $6! - 3! = 720 - 6 = 714$

27. 함수 $f(x)=4-|x|,\ g(x)=-4+|x|$ 에서, $y=f(g(x))$ 와 $y=g(f(x))$ 로 둘러싸여있는 영역의 넓이는?

① 36　　② 64　　③ 72　　④ 54　　⑤ 108

해설

i) $y=f(g(x))=4-|-4+|x||$ 에서

$x\geq 4$ 일 때, $y=4-(-4+x)=-x+8$

$0\leq x<4$ 일 때, $y=4+(-4+x)=x$

$-4\leq x<0$ 일 때, $y=4+(-4-x)=-x$

$x<-4$ 일 때, $y=4-(-4-x)=x+8$

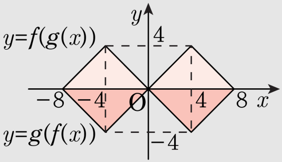
ii) $y=g(f(x))=-4+|4-|x||$ 에서

$x\geq 4$ 일 때, $y=-4-(4-x)=x-8$

$0\leq x<4$ 일 때, $y=-4+(4-x)=-x$

$-4\leq x<0$ 일 때, $y=-4+(4+x)=x$

$x<-4$ 일 때, $y=-4-(4+x)=-x-8$



그림의 색칠 부분 넓이를 계산하면

$\therefore\ 8\times 8=64$