1. 세 꼭짓점의 좌표가 각각 $\mathrm{A}(a,3)$, $\mathrm{B}(-1,-5)$, $\mathrm{C}(3,7)$ 인 $\triangle\mathrm{ABC}$가 $\angle\mathrm{A}$가 직각인 직각삼각형이 되도록 하는 상수 a의 값들의 합은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$\triangle\mathrm{ABC}$에서 $\angle\mathrm{A}$가 직각이므로
피타고라스의 정리에 의해
$\overline{\mathrm{AB}}^2+\overline{\mathrm{CA}}^2=\overline{\mathrm{BC}}^2 \cdots$ ㉠
이때, 세 점 $\mathrm{A}(a,3)$, $\mathrm{B}(-1,-5)$, $\mathrm{C}(3,7)$에 대하여

$\overline{\mathrm{AB}}^2=(-1-a)^2+(-5-3)^2=a^2+2a+65$

$\overline{\mathrm{CA}}^2=(a-3)^2+(3-7)^2=a^2-6a+25$

$\overline{\mathrm{BC}}^2=(3+1)^2+(7+5)^2=160$ 이므로
㉠에 의해 $2a^2-4a+90=160$
$\therefore\ a^2-2a-35=0$
따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의해 a의 값들의 합은 2이다.

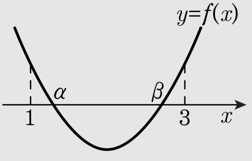
2. $1 < x < 3$ 에서 x 에 대한 이차방정식 $x^2 - ax + 4 = 0$ 이 서로 다른 두 실근을 갖도록 하는 실수 a 의 값의 범위가 $\alpha < a < \beta$ 일 때, $3\alpha\beta$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 52

해설

$f(x) = x^2 - ax + 4$ 라 하면
$1 < x < 3$ 에서 $y = f(x)$ 의 그래프는 다음 그림과 같아야 한다.



(i) $x^2 - ax + 4 = 0$ 의 판별식을 D 라 하면
$D = a^2 - 16 > 0$ 에서 $(a+4)(a-4) > 0$
$\therefore\ a < -4$ 또는 $a > 4$
(ii) $f(1) = 5 - a > 0$ 에서 $a < 5$
$f(3) = 13 - 3a > 0$ 에서 $a < \dfrac{13}{3}$
$\therefore\ a < \dfrac{13}{3}$
(iii) $y = f(x)$ 의 그래프의 대칭축이
$x = \dfrac{a}{2}$ 이므로 $1 < \dfrac{a}{2} < 3$
$\therefore\ 2 < a < 6$
(i), (ii), (iii) 에서 a 의 값의 범위는 $4 < a < \dfrac{13}{3}$
따라서, $\alpha = 4,\ \beta = \dfrac{13}{3}$ 이므로 $3\alpha\beta = 52$

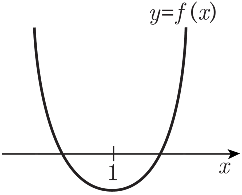
3. 이차방정식 $x^2-(a+1)x-3=0$의 한 근은 1보다 크고, 다른 한 근은 1보다 작도록 하는 실수 a의 값의 범위를 구하면?

① $a>-1$ ② $a>-2$ ③ $a>-3$

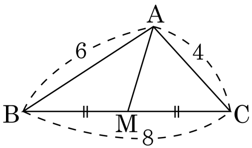
④ $a>-4$ ⑤ $a>-5$

해설

$f(x)=x^2-(a+1)x-3$ 이라 하면
$f(x)=0$ 의 한 근은 1 보다 크고
다른 한 근은 1 보다 작으므로
$y=f(x)$ 의 그래프는 다음 그림과 같다.
즉, $f(1)<0$ 이므로 $-a-3<0$
$\therefore a>-3$



4. 다음 그림의 $\triangle ABC$에서 $\overline{AB}=6$, $\overline{BC}=8$, $\overline{AC}=4$이고, $\overline{BC}$의 중점이 M일 때, $\overline{AM}^2$의 값을 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : 10

해설

중선정리에 의하여

$\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=2(\overline{AM}^2+\overline{BM}^2)$ 이므로

$6^2+4^2=2(\overline{AM}^2+4^2)$

$36+16=2\overline{AM}^2+32$

$\therefore \overline{AM}^2=10$

5. 좌표평면 위의 두 점 $A(1,0), B(5,4)$에 대하여 조건 $\overline{PA}=\overline{PB}$를 만족하는 점 P의 자취의 방정식을 구하면?

① $x-y+1=0$ ② $x+2y+4=0$ ③ $x+y+3=0$
④ $x-3y+4=0$ ⑤ $x+y-5=0$

해설

점 P의 좌표를 $(x,\ y)$로 놓고 주어진 조건
$\overline{PA}=\overline{PB}$를 이용하여
$x,\ y$사이의 관계식을 구한다.
점 P의 좌표를 $(x,\ y)$로 놓자.

이때, $\overline{PA}=\overline{PB}$에서 $\overline{PA}^2=\overline{PB}^2$이므로
$(x-1)^2+(y-0)^2=(x-5)^2+(y-4)^2$
$x^2-2x+1+y^2=x^2-10x+25+y^2-8y+16$
$8x+8y-40=0$
$\therefore x+y-5=0$

6. 세 점 $A(-1,-4)$, $B(3,-3)$, $C(7,1)$ 과 좌표평면 위의 점 P 에 대하여 $\overline{AP}^2+\overline{BP}^2+\overline{CP}^2$ 의 최솟값은?

① 46 ② 45 ③ 44 ④ 43 ⑤ 42

해설

점 P 를 $P(x,y)$ 라고 하면

$\overline{AP}^2+\overline{BP}^2+\overline{CP}^2$

$=\left\{(x+1)^2+(y+4)^2\right\}$

$+\left\{(x-3)^2+(y+3)^2\right\}$

$+\left\{(x-7)^2+(y-1)^2\right\}$

$=x^2+2x+1+y^2+8y+16+x^2-6x+9$

$+y^2+6y+9+x^2-14x+49+y^2-2y+1$

$=3x^2-18x+3y^2+12y+85$

$=3(x^2-6x+9)+3(y^2+4y+4)+46$

$=3(x-3)^2+3(y+2)^2+46$

따라서 $x=3$, $y=-2$ 일 때,

$\overline{AP}^2+\overline{BP}^2+\overline{CP}^2$ 의 최솟값은 46 이다.

7. 두 부등식 $x^2-x-2>0$, $x^2-(a-3)x-3a<0$를 동시에 만족하는 정수가 -2뿐일 때, a의 값의 범위를 구하면 $m<a\le n$이다. mn의 값을 구하시오.

▶ 답 :

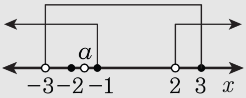
▷ 정답 : -6

해설

$x^2-x-2>0$에서 $x<-1$, $x>2$

$x^2-(a-3)x-3a<0$에서

$(x+3)(x-a)<0$



그림에서와 같이 동시에 만족하는

정수값이 -2뿐이려면 $-2<a\le3$이다.

$\therefore\ -2<a\le3$

8. 세 변의 길이가 $x,\ x+1,\ x+2$인 삼각형이 둔각삼각형이 되는 x의 범위가 $\alpha < x < \beta$일 때,$\alpha+\beta$의 값은?

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

해설

$x > 0 \cdots\cdots$ ㉠

$x+2$가 최대변이므로

$x+2 < (x+1)+x \quad \therefore\ x > 1 \cdots\cdots$ ㉡

둔각삼각형이 되는 조건은

$(x+2)^2 > (x+1)^2 + x^2$

$\therefore\ -1 < x < 3 \cdots\cdots$ ㉢

㉠,㉡,㉢에서 공통범위를 구하면

$1 < x < 3$

$\therefore\ \alpha = 1,\ \beta = 3$

$\therefore\ \alpha+\beta = 4$

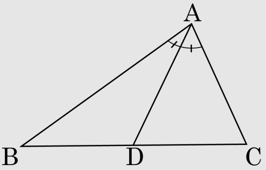
9. 좌표평면 위에 있는 세 점 $A(2,\ 10)$, $B(-8,\ -14)$, $C(10,\ 4)$를 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC가 있다. $\angle A$의 이등분선이 변 BC와 만나는 점을 D라고 할 때, D의 좌표는?

① $D(5,\ 1)$ ② $D(5,\ -1)$ ③ $D(-5,\ 1)$

④ $D(-5,\ -1)$ ⑤ $D(2,\ -3)$

해설

다음 그림과 같이 $\overline{AD}$ 가 각의 이등분선일 때,



$\overline{AB} : \overline{AC} = \overline{BD} : \overline{DC}$ 이다.

$\overline{AB} = 26$, $\overline{AC} = 10$이고

$\overline{AB} : \overline{AC} = \overline{BD} : \overline{DC}$이므로

D 는 $\overline{BC}$ 를 $13 : 5$ 로 내분하는 점이다.

$$D\left(\frac{13\times 10 + 5\times(-8)}{13+5},\ \frac{13\times 4 + 5\times(-14)}{13+5}\right)$$

$\therefore\ D(5,\ -1)$

10. 세 점 $A(-4,0)$, $B(4,0)$, $C(0,3)$과 점 $P(x,y)$가 있다. $\overline{AP}^2+\overline{BP}^2+\overline{CP}^2$의 최솟값과 그 때의 점 P의 좌표는?

① 30, $P(0,1)$ ② 30, $P(0,2)$ ③ 38, $P(0,1)$

④ 34, $P(0,2)$ ⑤ 38, $P(0,2)$

해설

$\overline{AP}^2+\overline{BP}^2+\overline{CP}^2$

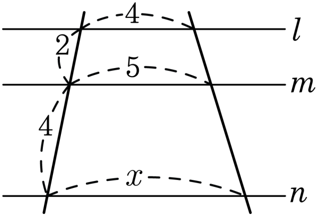
$=(x+4)^2+y^2+(x-4)^2+y^2+x^2+(y-3)^2$

$=3x^2+3y^2-6y+41$

$=3x^2+3(y-1)^2+38$

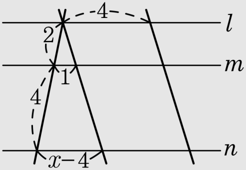
따라서 최솟값 38, $P(0,1)$

11. 다음 그림에서 $l//m//n$ 일 때, x 의 값은?



① 7 ② 7.5 ③ 8 ④ 8.5 ⑤ 9

해설

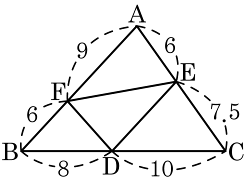


다음과 같이 보조선을 그으면

$2 : 1 = 6 : (x-4)$ 이므로 $2x-8=6$

$\therefore\ x=7$

12. 다음 그림에서 선분 DE, EF, FD 중에서 $\triangle$ABC 의 변에 평행한 선분을 기호로 나타내어라.



▶ 답 :

▷ 정답 : $\overline{\mathrm{ED}}$

해설

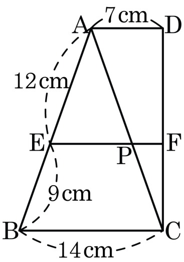
$9 : 6 \neq 6 : 7.5$

$8 : 10 \neq 6 : 9$

$7.5 : 6 = 10 : 8$

$\therefore \overline{\mathrm{AB}} \,//\, \overline{\mathrm{ED}}$

13. 다음 그림에서 $\overline{AD} \mathbin{/\!/} \overline{EF} \mathbin{/\!/} \overline{BC}$ 일 때, $\overline{EP}$ 와 $\overline{PF}$ 의 길이의 차를 구하여라.



▶ 답 : ______ cm

▷ 정답 : 5 cm

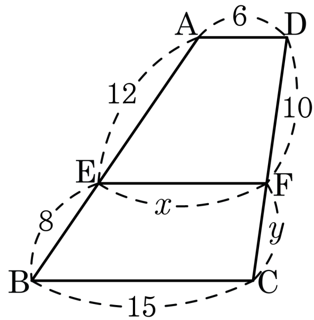
해설

$12 : 21 = \overline{EP} : 14,\ \overline{EP} = 8\ (\mathrm{cm})$

$9 : 21 = \overline{PF} : 7,\ \overline{PF} = 3\ (\mathrm{cm})$

$\therefore\ \overline{EP} - \overline{PF} = 8 - 3 = 5\ (\mathrm{cm})$

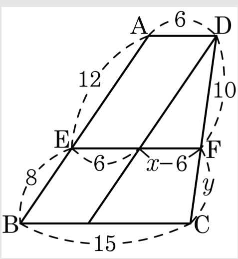
14. 다음 그림에서 $\overline{AD} \mathbin{/\!/} \overline{EF} \mathbin{/\!/} \overline{BC}$ 이다. $5x+3y$ 의 값을 구하면?



① 56 ② 65 ③ 73 ④ 77 ⑤ 88

해설

$\overline{AB}$ 를 점 D 로 평행이동 하여 삼각형을 만들면,

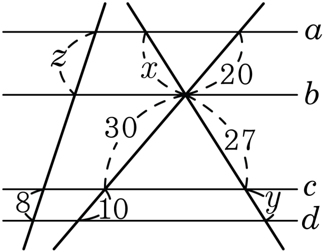


$$12:20=(x-6):9 \quad \therefore x=\frac{57}{5}$$

$$12:8=10:y \quad \therefore y=\frac{20}{3}$$

따라서 $5x+3y=5\times\frac{57}{5}+3\times\frac{20}{3}=77$

15. 다음 그림에서 $a \mathbin{/\!/} b \mathbin{/\!/} c \mathbin{/\!/} d$ 일 때, $x+y+z$ 의 값은?



① 35 ② 38 ③ 40 ④ 43 ⑤ 45

해설

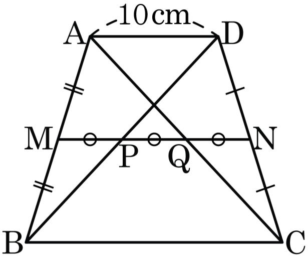
$20 : 30 = x : 27$ 이므로 $x = 18$

$30 : 10 = 27 : y$ 이므로 $y = 9$

$20 : 10 = z : 8$ 이므로 $z = 16$

$\therefore\ x+y+z = 43$

16. 다음 그림과 같은 사다리꼴 ABCD 에서 두 점 M, N 은 각각 $\overline{AB}$, $\overline{CD}$ 의 중점이다. $\overline{MP} = \overline{PQ} = \overline{QN}$ 일 때, $\overline{BC}$ 의 길이를 구하여라.



▶ 답 : ＿＿＿＿＿＿ cm

▷ 정답 : 20 cm

해설

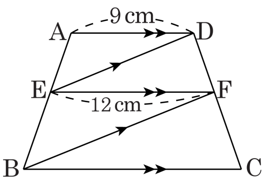
$\overline{BM} : \overline{BA} = \overline{MP} : \overline{AD}$ 에서 $1 : 2 = \overline{MP} : 10$ 이다.

따라서 $\overline{MP} = 5$ 이다.

$\overline{MQ} = 2\overline{MP}$ 이므로 $\overline{MQ} = 10\text{cm}$ 이다.

$1 : 2 = 10 : \overline{BC}$ 이므로 $\overline{BC} = 20$ 이다.

17. 다음 그림과 같은 사다리꼴에서 $\overline{BC}$의 길이를 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : 16 cm

해설

$\triangle AED \backsim \triangle EBF$(AA 닮음) 이므로

$\overline{AE} : \overline{EB} = 9 : 12 = 3 : 4$

$\overline{AD} // \overline{EF} // \overline{BC}$ 이므로

$\overline{AE} : \overline{EB} = \overline{DF} : \overline{FC} = 3 : 4$

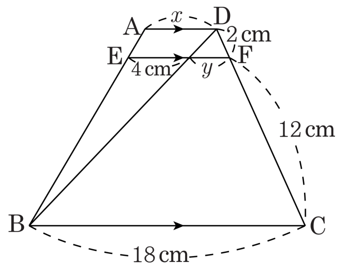
또한, $\triangle DEF \backsim \triangle FBC$(AA 닮음) 이므로

$\overline{EF} : \overline{BC} = \overline{DF} : \overline{FC} = 3 : 4$

따라서 $12 : \overline{BC} = 3 : 4$ 이므로

$\overline{BC} = 16(\text{cm})$

18. 다음 그림과 같은 사다리꼴 ABCD에서 $\overline{AD}//\overline{EF}//\overline{BC}$일 때, xy의 길이를 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : 12

해설

$\triangle$ABD에서

$12 : (12+2) = 4 : x$, $12 : 14 = 4 : x$, $6 : 7 = 4 : x$

$6x = 28$

$\therefore\ x = \dfrac{14}{3}(\text{cm})$

$\triangle$DBC에서 $2 : (2+12) = y : 18$

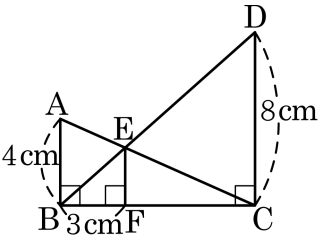
$2 : 14 = y : 18$

$14y = 36$

$\therefore\ y = \dfrac{18}{7}(\text{cm})$

$\therefore\ xy = 12$

19. 다음 그림과 같이 $\overline{AB}//\overline{EF}//\overline{CD}$이고 $\overline{AB}=4\text{cm}$, $\overline{BF}=3\text{cm}$, $\overline{CD}=8\text{cm}$, $\angle DCF=90^\circ$ 라 할 때, □EFCD의 넓이는?



① 20cm^2　② 24cm^2　③ 32cm^2
④ 36cm^2　⑤ 40cm^2

해설

$\overline{AB}:\overline{CD}=\overline{AE}:\overline{CE}=1:2$이다.

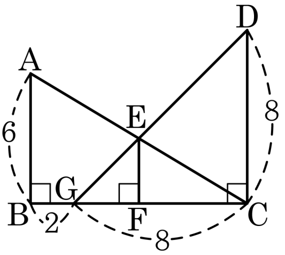
i) $\overline{BE}:\overline{DE}=1:2$이므로 $\overline{EF}:\overline{CD}=1:3$이다.

따라서 $\overline{EF}:8=1:3$이므로 $\overline{EF}=\frac{8}{3}\text{cm}$이다.

ii) $1:2=3:\overline{CF}$, $\overline{CF}=6(\text{cm})$

$\therefore$ □EFCD $=\frac{1}{2}\times 6\times\left(8+\frac{8}{3}\right)=3\times\frac{32}{3}=32(\text{cm}^2)$

20. 다음 그림에서 $\angle B = \angle BFE = \angle DCG = 90°$, $\overline{AB} = 6$, $\overline{DC} = 8$, $\overline{BG} = 2$, $\overline{GC} = 8$ 일 때, $\overline{EF}$ 의 길이는?



① 2 ② 2.5 ③ 3 ④ 3.5 ⑤ 4

해설

$\overline{EF}//\overline{DC}$ 이므로 $\overline{GF} : \overline{GC} = \overline{EF} : \overline{CD}$

$\overline{GF} : 8 = x : 8$, $\overline{GF} = x$

$\therefore\ \overline{CF} = 8 - x$

$\overline{AB}//\overline{EF}$ 이므로 $\overline{CF} : \overline{CB} = \overline{EF} : \overline{AB}$

$(8 - x) : 10 = x : 6$

$10x = 6(8 - x)$

$10x = 48 - 6x$

$16x = 48$

$\therefore x = 3$