1. 좌표평면 위에 세 지점 $\mathrm{P}(1,5)$, $\mathrm{Q}(-2,-4)$, $\mathrm{R}(5,3)$이 있다. 이들 세 지점에서 같은 거리에 있는 지점에 물류창고를 설치하려고 한다. 이 때, 창고의 위치의 좌표는?

① $(0,-1)$　② $(0,0)$　③ $(0,1)$
④ $(1,0)$　⑤ $(1,1)$

해설

$\mathrm{A}(a,\ b)$라고 하면

$(a-1)^2+(b-5)^2=\overline{\mathrm{AP}}^2 \quad \cdots \quad ①$

$(a+2)^2+(b+4)^2=\overline{\mathrm{AQ}}^2 \quad \cdots \quad ②$

$(a-5)^2+(b-3)^2=\overline{\mathrm{AR}}^2 \quad \cdots \quad ③$

$\overline{\mathrm{AP^2}}=\overline{\mathrm{AQ}}^2=\overline{\mathrm{AR}}^2$이므로

①, ② 연립하면 $a+3b=1$

①, ③ 연립하면 $2a-b=2$

$\therefore\ a=1,\ b=0$

$\therefore\ (1,\ 0)$

∴ 세 점을 꼭지점으로 하는 삼각형의 외심을 구하는 것과 같다.

2. 점 A(3, -1)과 직선 $x+y-3=0$ 위의 점 P를 연결하는 선분의 중점의 자취의 방정식은?

① $x+2y-5=0$ ② $2x-2y+5=0$

③ $2x-y-5=0$ ④ $x+y-5=0$

⑤ $2x+2y-5=0$

해설

$x+y-3=0$ 위의 임의의 한 점을 P(a, $-a+3$) 이라 하고
$\overline{AP}$의 중점의 좌표를 Q (x, y)라 하면

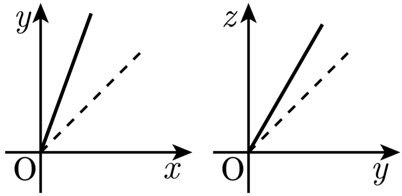
$$x=\frac{a+3}{2},\quad y=\frac{-a+2}{2}$$

$\therefore\ a=2x-3,\quad a=-2y+2$

$\therefore\ 2x-3=-2y+2$

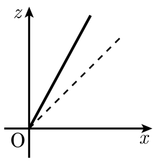
$\therefore\ 2x+2y-5=0$

3. 세 변수 x, y, z 에 대하여 아래의 두 그래프(실선)는 각각 x 와 y , y 와 z 사이의 관계를 나타낸 것이다.

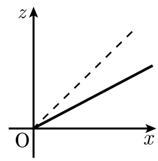


이때, x 와 z 사이의 관계를 그래프로 나타내면? (단, 점선은 원점을 지나고 기울기가 1 인 직선이다.)

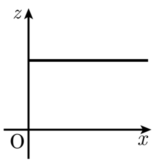
①



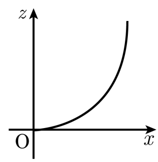
②



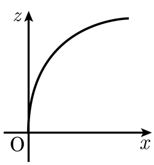
③



④



⑤



해설

주어진 그래프에서 x, y, z 사이의 관계를 식으로 나타내면 $y = ax(a > 1)$, $z = by(b > 1)$

$\therefore\ z = b(ax) = abx\ (ab > 1)$

따라서, $z = abx$ 의 그래프는 보기의 ①과 같다.

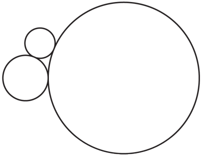
4. 좌표평면 위의 점 P(4, 9)를 지나고 x절편과 y절편, 기울기가 모두 정수인 직선의 개수는 ?

① 4 ② 5 ③ 6 ④ 8 ⑤ 9

해설

점 P(4, 9)를 지나는 직선의 기울기를
m이라 하면
직선의 방정식은 $y-9=m(x-4)\cdots$ ㉠
x절편 : ㉠에 $y=0$을 대입하면
$-9=m(x-4)$
$\therefore\ x=4-\dfrac{9}{m}$
y절편 : ㉠에 $x=0$을 대입하면
$y-9=-4m$
$\therefore\ y=9-4m$
따라서 x절편, y절편이 모두 정수가 되기위해서는 m의 값은 9의 약수(음수 포함)이어야 한다.
따라서 $m=1,\ 3,\ 9,\ -1,\ -3,\ -9$
$\therefore$직선은 6개 존재한다.

5. 반지름이 각각 2, 3, 10 인 세 원이 그림과 같이 둘 씩 서로 외접하고 있다. 이 때, 세 접점을 지나는 원의 넓이를 구하면?



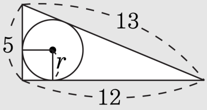
① $\dfrac{8}{3}\pi$ ② 4π ③ $\dfrac{9}{2}\pi$

④ 6π ⑤ $\dfrac{20}{3}\pi$

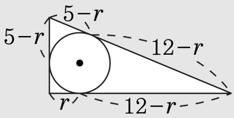
해설

중심사이거리가 각각 12, 5, 13 이다. 세 원의 중심을 이은 삼각형은 $12^2+5^2=13^2$ 이므로 직각삼각형이다.

$\therefore$ 세 점을 지나는 원은 직각삼각형의 내접원이다.



$\Rightarrow$



$\Rightarrow \quad (5-r)+(12-r)=13$

$\Rightarrow \quad r=2$

$\therefore$ 원의 넓이는 $\pi\times 2^2=4\pi$

6. 집합 $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$의 부분집합 중에서 적어도 한 개의 홀수를 포함하는 것의 개수를 구하면?

① 32　② 56　③ 64　④ 72　⑤ 120

해설

'적어도~ '문제에서는 반대의 경우의 수를 구하여 모든 경우의 수에서 빼준다.
모든 부분집합의 수 : $2^6 = 128$ 짝수로만 만들 수 있는 부분집합의 수 : $2^3 = 8$
$\therefore 128 - 8 = 120$

7. $n(A)=3$ 인 집합 A 에 대하여 집합 $P=\{X|X \subset A\}$ 일 때, 집합 P 의 부분집합 중 공집합을 뺀 나머지의 개수를 구하여라.

▶ 답 : ______ 개

▷ 정답 : 255 개

해설

집합 P 는 집합 A 의 모든 부분집합을 원소로 가지므로

$n(P)=2^3=8$,

따라서 집합 P 의 부분집합 중 공집합을 뺀 나머지의 개수는

$2^8-1=255$ (개)

8. 집합 $P=\{p_1, p_2, p_3, \cdots, p_N\}$ 에 대하여 $f(P)=p_1+p_2+p_3+\cdots+p_N$ 이라 정의한다.
집합 $A=\{3, 6, 9, 12\}$ 의 부분집합을 $A_1, A_2, A_3, \cdots, A_{16}$ 이라 할 때, $f(A_1)+f(A_2)+(A_3)+\cdots+f(A_{16})$ 의 값을 구하여라.

▶ **답 :**

▷ **정답 :** 240

해설

$A=\{3, 6, 9, 12\}$ 의 부분집합을 $A_1, A_2, A_3, \cdots, A_{16}$ 이라 두면, 집합 A 의 모든 부분집합에서 하나의 원소는 모두 $2^{4-1}=8$ (번) 씩 나온다.
따라서 $f(A_1)+f(A_2)+(A_3)+\cdots+f(A_{16})=8\times(3+6+9+12)=240$

9. 두 집합 $A = \{2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10\}$, $B = \{2,\ 4,\ 8\}$ 에 대하여 $X - A = \varnothing$, $n(X \cap B) = 1$ 을 만족하는 집합 X 의 개수를 구하여라.

▶ **답 :** ______ 개

▷ **정답 :** 12 개

해설

$X - A = \varnothing$ 이면 $X \subset A$

$n(X \cap B) = 1$ 이므로 X 는 B 의 원소 하나를 포함하고 나머지 두 원소는 포함하지 않는 A 의 부분집합이다.

X 가 2 를 포함하고 4, 8 을 포함하지 않은 경우 (집합 X의 개수) $= 2^{5-3} = 4$(개) , X 가 4 를 포함한 경우와 8 을 포함한 경우도 마찬가지이므로

(집합 X의 개수) $= 4 \times 3 = 12$(개) 이다.

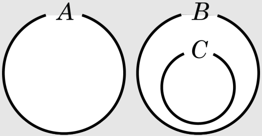
10. 집합 A와 B가 서로소이고 $C \subset B$일 때, 다음 중 옳은 것을 모두 고르면?

① $A \cap C = \varnothing$ ② $A \cap C = C$ ③ $A \cup C = A$

④ $B \cup C = B$ ⑤ $\{\{1\}, 1\} \subset A$

해설

$A \cap B = \varnothing$, $C \subset B$ $\therefore A \cap C = \varnothing, B \cup C = B$



11. 자연수 n 의 양의 배수의 집합을 A_n 이라 할 때, 다음 <보기> 에서 옳은 것을 모두 고른 것은? (단, m, n 은 자연수)

보기

㉠ $A_5 \cap A_7 = \varnothing$

㉡ $A_4 \cup A_6 = A_4$

㉢ $m,\ n$이 서로소이면 $A_m \cap A_n = A_{mn}$

㉣ $m = kn$(k는 양의 정수) 이면 $A_m \subset A_n$

① ㉠, ㉡, ㉣　② ㉠, ㉢　③ ㉠, ㉢, ㉣

④ ㉡, ㉢, ㉣　⑤ ㉢, ㉣

해설

㉠ $A_5 \cap A_7 = A_{35}$

㉡ $A_4 = \{4,\ 8,\ 12,\ 16,\ \cdots\}$

$A_6 = \{6,\ 12,\ 18,\ 24,\ \cdots\}$ 이므로

$A_4 \cup A_6 = \{4,\ 6,\ 8,\ 12,\ 16,\ \cdots\} \neq A_4$

㉢ $A_m = \left\{m,\ 2m,\ \cdots,\ nm,\ (n+1)m,\ \cdots\right\}$

$A_n = \left\{n,\ 2n,\ \cdots,\ mn,\ (m+1)n,\ \cdots\right\}$

$m,\ n$이 서로소이면 $A_m \cap A_n = A_{mn}$

㉣ $A_m = A_{kn} = \{kn,\ 2kn,\ 3kn,\ \cdots\}$

$A_n = \{n,\ 2n,\ 3n,\ 4n,\ \cdots\}$이므로

$A_m \subset A_n$

12. 1, 2, 3 번 문제의 정답률을 100 명의 학생을 대상으로 조사하였다. 1 번 문제를 맞힌 학생은 50 명, 2 번 문제를 맞힌 학생은 35 명, 3 번 문제를 맞힌 학생은 45 명이었다. 또, 1 번 문제를 맞히고 2 번 문제를 틀린 학생은 35 명, 2 번 문제를 맞히고 3 번 문제를 틀린 학생은 25 명, 3 번 문제를 맞히고 1 번 문제를 틀린 학생은 33 명이었다. 1, 2, 3 번 문제를 모두 틀린 학생이 5 명일 때, 두 문제만 맞힌 학생 수를 구하여라.

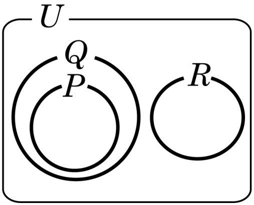
▶ 답 : ______ 명

▷ 정답 : 31 명

해설

전체 학생의 집합 U 라 두고, 1 번 문제를 맞힌 학생의 집합 A, 2 번 문제를 맞힌 학생의 집합 B,
3 번 문제를 맞힌 학생의 집합을 C 라 두면,
$n(U) = 100, n(A) = 50, n(B) = 35, n(C) = 45$ 이다.
1 번 문제를 맞히고 2 번 문제를 틀린 학생 수
$n(A - B) = n(A) - n(A \cap B) = 35 \;\rightarrow\; n(A \cap B) = 15$
2 번 문제를 맞히고 3 번 문제를 틀린 학생 수
$n(B - C) = n(B) - n(B \cap C) = 25 \;\rightarrow\; n(B \cap C) = 10$
3 번 문제를 맞고 1 번 문제를 틀린 학생 수
$n(C - A) = n(C) - n(C \cap A) = 33 \;\rightarrow\; n(C \cap A) = 12$
1, 2, 3 번 문제를 모두 틀린 학생 수
$n(U) - n(A \cup B \cup C) = 5 \;\rightarrow\; n(A \cup B \cup C) = 95$
$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - (n(A \cap B) + n(B \cap C) + n(C \cap A)) + n(A \cap B \cap C)$ 이므로,
$95 = 50 + 35 + 45 - 15 - 10 - 12 + n(A \cap B \cap C)$
$\rightarrow n(A \cap B \cap C) = 2,$
두 문제만 맞힌 학생 수는
$n(A \cap B) + n(B \cap C) + n(C \cap A) - 3n(A \cap B \cap C)$
$\therefore n(A \cap B) + n(B \cap C) + n(C \cap A) - 3n(A \cap B \cap C) = 15 + 10 + 12 - 6 = 31$

13. 전체집합 U 에서 세 조건 p, q, r 를 만족하는 집합을 각각 P, Q, R 라 할 때, 세 집합 사이의 포함 관계가 다음 그림과 같다.



이때, 다음 명제 중 참인 것은?

① $q \to r$

② $r \to \sim p$

③ $(q$ 또는 $r) \to \sim p$

④ $(\sim q$ 이고 $r) \to p$

⑤ $p \to (\sim q$ 또는 $r)$

해설

② 주어진 벤 다이어그램에서 $R \subset P^c$ 이므로 $r \to \sim p$ 는 참인 명제이다.

14. 두 조건 $p : |x-2| \le h$, $q : |x+1| \le 7$에 대하여 'p이면 q이다.'가 참이 되도록 하는 h의 최댓값을 구하여라. (단, $h \ge 0$)

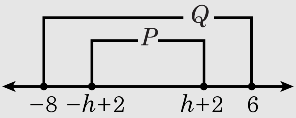
▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

p : $2-h \le x \le 2+h$

q : $-8 \le x \le 6$



$-h+2 \ge -8 \leftrightarrow h \le 10$, $h+2 \le 6 \leftrightarrow h \le 4$

$\therefore h \le 4$

$\therefore n$의 최댓값은 4

15. 어떤 사건을 조사하는 과정에서 네 사람 A, B, C, D 중에서 한 명이 범인이라는 사실을 알았다. 용의자 네 명의 진술 중 옳은 것은 하나뿐일 때, 그 진술을 한 사람과 범인을 차례로 쓴 것은?

A : 범인은 B이다. B : 범인은 D이다. C : 나는 범인이 아니다. D : B는 거짓말을 하고 있다.

① A, D　② B, C　③ C, B　④ D, C　⑤ B, A

해설

B가 옳은 진술이라면 범인은 D가 되고 C도 옳은 진술이 된다. 그러나 진실을 말한 사람은 한 명뿐이기 때문에 B는 거짓이 되고, D가 옳은 진술이 된다. D를 제외한 나머지 모두 거짓말이 되기 때문에 범인은 C다.