1. 좌표평면 위에 세 지점 $\mathrm{P}(1,5)$, $\mathrm{Q}(-2,-4)$, $\mathrm{R}(5,3)$ 이 있다. 이들 세 지점에서 같은 거리에 있는 지점에 물류창고를 설치하려고 한다. 이 때, 창고의 위치의 좌표는?

① $(0,-1)$　　② $(0,0)$　　③ $(0,1)$

④ $(1,0)$　　⑤ $(1,1)$

해설

$\mathrm{A}(a,\ b)$ 라고 하면

$(a-1)^2+(b-5)^2=\overline{\mathrm{AP}}^2 \quad \cdots \quad$ ①

$(a+2)^2+(b+4)^2=\overline{\mathrm{AQ}}^2 \quad \cdots \quad$ ②

$(a-5)^2+(b-3)^2=\overline{\mathrm{AR}}^2 \quad \cdots \quad$ ③

$\overline{\mathrm{AP^2}}=\overline{\mathrm{AQ}}^2=\overline{\mathrm{AR}}^2$ 이므로

①, ② 연립하면 $a+3b=1$

①, ③ 연립하면 $2a-b=2$

$\therefore\ a=1,\ b=0$

$\therefore\ (1,\ 0)$

$\therefore$ 세 점을 꼭지점으로 하는 삼각형의 외심을 구하는 것과 같다.

2. 점 A$(3,\ -1)$과 직선 $x+y-3=0$ 위의 점 P를 연결하는 선분의 중점의 자취의 방정식은?

① $x+2y-5=0$　　② $2x-2y+5=0$

③ $2x-y-5=0$　　④ $x+y-5=0$

⑤ $2x+2y-5=0$

해설

$x+y-3=0$ 위의 임의의 한 점을 $P(a,\ -a+3)$ 이라 하고 $\overline{AP}$ 의 중점의 좌표를 $Q(x,\ y)$ 라 하면

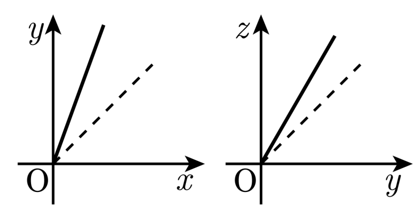
$x=\frac{a+3}{2},\quad y=\frac{-a+2}{2}$

$\therefore\ a=2x-3,\quad a=-2y+2$

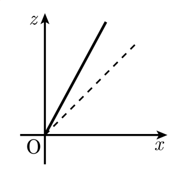
$\therefore\ 2x-3=-2y+2$

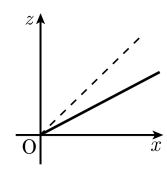
$\therefore\ 2x+2y-5=0$

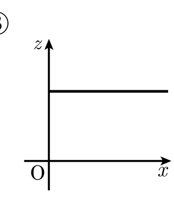
3. 세 변수 x, y, z 에 대하여 아래의 두 그래프(실선)는 각각 x 와 y , y 와 z 사이의 관계를 나타낸 것이다.

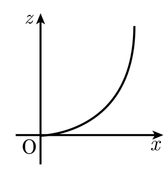


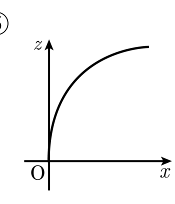
이때, x 와 z 사이의 관계를 그래프로 나타내면? (단, 점선은 원점을 지나고 기울기가 1 인 직선이다.)

①


②


③


④


⑤


해설

주어진 그래프에서 x, y, z 사이의 관계를
식으로 나타내면 $y = ax(a > 1)$, $z = by(b > 1)$
$\therefore\ z = b(ax) = abx\ (ab > 1)$
따라서, $z = abx$ 의 그래프는 보기의 ①과 같다.

4. 좌표평면 위의 점 P(4, 9)를 지나고 x절편과 y절편, 기울기가 모두 정수인 직선의 개수는 ?

① 4 ② 5 ③ 6 ④ 8 ⑤ 9

해설

점 P(4, 9)를 지나는 직선의 기울기를
m이라 하면
직선의 방정식은 $y-9=m(x-4)\cdots$ ㉠
x절편 : ㉠에 $y=0$을 대입하면
$-9=m(x-4)$
$\therefore\ x=4-\dfrac{9}{m}$
y절편 : ㉠에 $x=0$을 대입하면
$y-9=-4m$
$\therefore\ y=9-4m$
따라서 x절편, y절편이 모두 정수가 되기위해서는 m의 값은 9의 약수(음수 포함)이어야 한다.
따라서 $m=1,\ 3,\ 9,\ -1,\ -3,\ -9$
$\therefore$ 직선은 6개 존재한다.

5. 두 원 $x^2 + y^2 = 1$, $(x - a)^2 + (y - b)^2 = 4$에 대하여 두 원이 외접할 때 $a^2 + b^2$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 9

해설

외접하기 위한 조건은 $\sqrt{a^2 + b^2} = 2 + 1$

$\therefore a^2 + b^2 = 9$

6. 집합 $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ 의 부분집합 중에서 적어도 한 개의 홀수를 포함하는 것의 개수를 구하면?

① 32　② 56　③ 64　④ 72　⑤ 120

해설

'적어도~ '문제에서는 반대의 경우의 수를 구하여 모든 경우의 수에서 빼준다.
모든 부분집합의 수 : $2^6 = 128$ 짝수로만 만들 수 있는 부분집합의 수 : $2^3 = 8$
$\therefore 128 - 8 = 120$

7. 자연수로 이루어진 집합 $A = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \cdots,\ n\}$ 의 부분집합 중에서 원소 $n-1$ 과, n 을 포함하지 않은 부분집합의 개수가 64 일 때, n 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

집합 A 의 원소의 개수가 n 개이므로
$2^{n-2} = 64 = 2^6$ 이다.
$\therefore\ n-2=6,\ n=8$

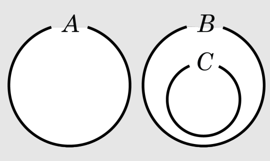
8. 집합 A와 B가 서로소이고 $C \subset B$일 때, 다음 중 옳은 것을 <u>모두</u> 고르면?

① $A \cap C = \varnothing$ ② $A \cap C = C$ ③ $A \cup C = A$

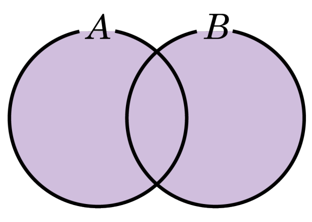
④ $B \cup C = B$ ⑤ $\{\{1\}, 1\} \subset A$

해설

$A \cap B = \varnothing$, $C \subset B$ $\therefore A \cap C = \varnothing, B \cup C = B$



9. 두 집합 $A = \{1,\ 3,\ 5,\ 9,\ 15\}$, $B = \{3 \times x \mid x \in A\}$ 에 대하여 다음 벤 다이어그램의 색칠한 부분을 나타내는 집합의 원소의 합을 구하여라.

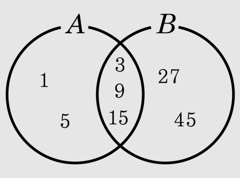


▶ 답 :

▷ 정답 : 105

해설

$B = \{3 \times x \mid x \in A\}$ 는 집합 A 의 원소를 x 에 대입한 수들의 집합이다.
원소나열법으로 고쳐보면,
$B = \{3,\ 9,\ 15,\ 27,\ 45\}$ 이다.
벤 다이어그램을 그리면 다음과 같다.



색칠한 부분의 원소는 $\{1,\ 3,\ 5,\ 9,\ 15,\ 27,\ 45\}$ 이다.
따라서 모든 원소의 합은
$1 + 3 + 5 + 9 + 15 + 27 + 45 = 105$ 이다.

10. 자연수 k의 배수를 원소로 하는 집합을 A_k라 할때, $(A_4 \cap A_6) \supset A_k$ 인 k의 최솟값을 a라 하고 $(A_8 \cup A_{12}) \subset A_k$ 인 k 의 최댓값을 b라 할 때 $a+b$의 값은 ?

① 16　② 20　③ 10　④ 15　⑤ 27

해설

$(A_4 \cap A_6) \supset A_k$ 인 k 는 4 와 6 의 공배수이므로 k 의 최솟값은 4 와 6 의 최소공배수 12 이다. $(A_8 \cup A_{12}) \subset A_k$ 인 k 는 8 과 12 의 공약수이므로 k 의 최댓값은 8과 12 의 최대공약수 4이다.
$\therefore$ 최솟값 a는 12 이고 최댓값 b는 4이므로 $a+b = 12+4 = 16$

11. 두 집합 $A,\ B$ 에 대하여 $n(A-B)=3,\ n(B-A)=5,\ n(A\cup B)=12$ 일 때, $n(A\cap B)$ 를 구하여라.

▶ 답 :

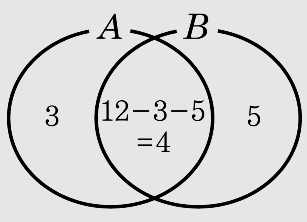
▷ 정답 : 4

해설

$n(A\cup B)=n(A-B)+n(A\cap B)+n(B-A)$

$12=3+n(A\cap B)+5\quad \therefore\ n(A\cap B)=4$

[별해] 벤 다이어그램의 각 부분에 속하는 원소의 개수를 적어 보면



따라서 $n(A\cap B)=4$ 이다.

12. 1, 2, 3번 문제의 정답률을 100명의 학생을 대상으로 조사하였다. 1번 문제를 맞힌 학생은 50명, 2번 문제를 맞힌 학생은 35명, 3번 문제를 맞힌 학생은 45명이었다. 또, 1번 문제를 맞히고 2번 문제를 틀린 학생은 35명, 2번 문제를 맞히고 3번 문제를 틀린 학생은 25명, 3번 문제를 맞히고 1번 문제를 틀린 학생은 33명이었다. 1, 2, 3번 문제를 모두 틀린 학생이 5명일 때, 두 문제만 맞힌 학생 수를 구하여라.

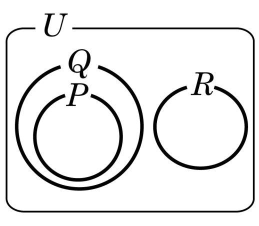
▶ 답 : ______ 명

▷ 정답 : 31 명

해설

전체 학생의 집합 U라 두고, 1번 문제를 맞힌 학생의 집합 A, 2번 문제를 맞힌 학생의 집합 B,
3번 문제를 맞힌 학생의 집합을 C라 두면,
$n(U) = 100, n(A) = 50, n(B) = 35, n(C) = 45$이다.
1번 문제를 맞히고 2번 문제를 틀린 학생 수
$n(A - B) = n(A) - n(A \cap B) = 35 \;\rightarrow\; n(A \cap B) = 15$
2번 문제를 맞히고 3번 문제를 틀린 학생 수
$n(B - C) = n(B) - n(B \cap C) = 25 \;\rightarrow\; n(B \cap C) = 10$
3번 문제를 맞고 1번 문제를 틀린 학생 수
$n(C - A) = n(C) - n(C \cap A) = 33 \;\rightarrow\; n(C \cap A) = 12$
1, 2, 3번 문제를 모두 틀린 학생 수
$n(U) - n(A \cup B \cup C) = 5 \;\rightarrow\; n(A \cup B \cup C) = 95$
$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - (n(A \cap B) + n(B \cap C) + n(C \cap A)) + n(A \cap B \cap C)$이므로,
$95 = 50 + 35 + 45 - 15 - 10 - 12 + n(A \cap B \cap C)$
$\rightarrow n(A \cap B \cap C) = 2$,
두 문제만 맞힌 학생 수는
$n(A \cap B) + n(B \cap C) + n(C \cap A) - 3n(A \cap B \cap C)$
$\therefore n(A \cap B) + n(B \cap C) + n(C \cap A) - 3n(A \cap B \cap C) = 15 + 10 + 12 - 6 = 31$

13. 전체집합 U 에서 세 조건 p, q, r 를 만족하는 집합을 각각 P, Q, R 라 할 때, 세 집합 사이의 포함 관계가 다음 그림과 같다.



이때, 다음 명제 중 참인 것은?

① $q \to r$

② $r \to \sim p$

③ (q 또는 r) $\to \sim p$

④ ($\sim q$ 이고 r) $\to p$

⑤ $p \to$ ($\sim q$ 또는 r)

해설

② 주어진 벤 다이어그램에서 $R \subset P^c$ 이므로 $r \to \sim p$ 는 참인 명제이다.

14. 두 조건 $p : |x-2| \le h,\ q : |x+1| \le 7$에 대하여 '$p$이면 q이다.'가 참이 되도록 하는 h의 최댓값을 구하여라. (단, $h \ge 0$)

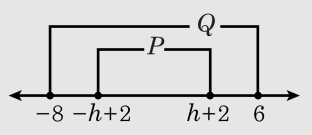
▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

$p\ :\ 2-h \le x \le 2+h$

$q\ :\ -8 \le x \le 6$



$-h+2 \ge -8 \leftrightarrow h \le 10,\ h+2 \le 6 \leftrightarrow h \le 4$

$\therefore h \le 4$

$\therefore n$의 최댓값은 4

15. 어떤 사건을 조사하는 과정에서 네 사람 A, B, C, D 중에서 한 명이 범인이라는 사실을 알았다. 용의자 네 명의 진술 중 옳은 것은 하나뿐일 때, 그 진술을 한 사람과 범인을 차례로 쓴 것은?

A : 범인은 B이다. B : 범인은 D이다. C : 나는 범인이 아니다. D : B 는 거짓말을 하고 있다.

① A, D　　② B, C　　③ C, B　　④ D, C　　⑤ B, A

해설

B가 옳은 진술이라면 범인은 D가 되고 C도 옳은 진술이 된다. 그러나 진실을 말한 사람은 한 명뿐이기 때문에 B는 거짓이 되고, D가 옳은 진술이 된다. D를 제외한 나머지 모두 거짓말이 되기 때문에 범인은 C다.