1. 실수 x 에 대하여 복소수 $(1+i)x^2-(1+3i)x-(2-2i)$ 가 순허수가 되도록 하는 x 의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$(1+i)x^2-(1+3i)x-(2-2i)$

$=(x^2-x-2)+(x^2-3x+2)i$

순허수가 되려면 (실수 부분)=0, (허수 부분)$\neq 0$이어야 하므로

$x^2-x-2=0$, $x^2-3x+2\neq 0$

(i) $x^2-x-2=0$ 에서 $(x+1)(x-2)=0$

$\therefore\ x=-1$ 또는 $x=2$

(ii) $x^2-3x+2\neq 0$ 에서 $(x-1)(x-2)\neq 0$

$\therefore\ x\neq 1$ 또는 $x\neq 2$

따라서 (i), (ii) 에 의하여 $x=-1$

2. $(1+ai)^2 = 2i$ (a 는 실수)라 할 때 $(1+ai)(1-ai)$ 의 값을 구하시오. (단, $i = \sqrt{-1}$)

▶ **답 :**

▷ **정답 :** 2

해설

$(1+ai)^2 = 2i$ 에서 $(1-a^2)+2ai = 2i$

복소수의 상등에서 $1-a^2 = 0,\ 2a = 2$

$\therefore\ a = 1$

$$\begin{aligned}\therefore\ (1+ai)(1-ai) &= (1+i)(1-i) \\ &= 1-(-1) \\ &= 2\end{aligned}$$

3. 등식 $\left(\frac{2+i}{1+\sqrt{2}i}\right)\left(\frac{1-4i}{1-\sqrt{2}i}\right)=a+bi$ 를 만족하는 실수 $a,\ b$ 에 대하여 $a-3b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $a-3b=9$

해설

$$(\text{좌변})=\frac{(2+i)(1-4i)}{(1+\sqrt{2}i)(1-\sqrt{2}i)}$$

$$=\frac{2-8i+i-4i^2}{1-2i^2}$$

$$=\frac{6-7i}{3}=2-\frac{7}{3}i$$ 이므로

$$2-\frac{7}{3}i=a+bi$$

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$$a=2,\ b=-\frac{7}{3}$$

$$\therefore\ a-3b=2-3\times\left(-\frac{7}{3}\right)=2+7=9$$

4. $\dfrac{5}{1+2i}=x+yi$ 를 만족하는 실수 x, y 의 합을 구하여라.(단, $i=\sqrt{-1}$)

▶ 답 :

▷ 정답 : $x+y=-1$

해설

$$\frac{5}{1+2i}=\frac{5(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)}=\frac{5(1-2i)}{5}=1-2i$$

$$1-2i=x+yi$$

$$x=1, y=-2, x+y=-1$$

5. $i^{2000}+i^{2002}+i^{2003}+i^{2004}$ 의 값을 구하면?

① 1 ② $1-i$ ③ $1+i$ ④ -1 ⑤ 0

해설

$i^4=1$ 이므로

$i^{4k}=1,\ i^{4k+1}=i,\ i^{4k+2}=-1,\ i^{4k+3}=-i$

$$
\begin{aligned}
(\text{준식}) &= 1+(-1)+(-i)+1 \\
&= 1-i
\end{aligned}
$$

6. $z = 1 - i$ 일 때, $\dfrac{\bar{z}-1}{z} - \dfrac{z-1}{\bar{z}}$ 의 값은?

① $-i$ ② i ③ $-2i$ ④ $2i$ ⑤ 1

해설

$z = 1 - i, \bar{z} = 1 + i$

$\therefore$ (준식) $= \dfrac{i}{1-i} - \dfrac{-i}{1+i} = \dfrac{2i}{2} = i$

7. 제곱해서 $5-12i$ 가 되는 복소수는?

① $\pm(2+3i)$　② $\pm(2-3i)$　③ $\pm(3-2i)$

④ $\pm(3+3i)$　⑤ $\pm(3+3i)$

해설

구하려는 복소수를 $a+bi$ (a, b 는 실수) 로 놓으면

$(a+bi)^2=a^2-b^2+2abi$ 에서

$a^2-b^2+2abi=5-12i$

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$a^2-b^2=5$, $2ab=-12$ 에서

$ab=-6$, $b=-\dfrac{6}{a}$ 이므로

$a^2-\left(-\dfrac{6}{a}\right)^2=5$, $a^2-\dfrac{36}{a^2}=5$

양변에 a^2 을 곱하면

$a^4-5a^2-36=0,\ (a^2-9)(a^2+4)=0$

따라서 $a^2=9$ 또는 $a^2=-4$ 이므로

$a=\pm 3$ 또는 $a=\pm 2i$

그런데 a 는 실수이므로 $a=\pm 3$ 이고, $b=\mp 2$ 이다.

따라서 구하는 복소수는 $\pm(3-2i)$ 이다.

8. $x = \dfrac{1-\sqrt{3}i}{2}$ 일 때, $x^2 - x + 1$ 의 값은?

① -1　　② 0　　③ 1

④ $\dfrac{1-\sqrt{3}i}{2}$　　⑤ $\dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}$

해설

$x = \dfrac{1-\sqrt{3}i}{2}$ 의 양변에 2 를 곱하면 $2x = 1 - \sqrt{3}i$

그러므로 $2x - 1 = -\sqrt{3}i$

이 식의 양변을 제곱하면 $4x^2 - 4x + 1 = -3$

즉, $4x^2 - 4x + 4 = 0$

따라서, $x^2 - x + 1 = 0$

9. 다음 중 옳지 <u>않은</u> 것은?

① -2의 제곱근은 $\sqrt{2}i$와 $-\sqrt{2}i$이다.

② $\sqrt{-2}\times\sqrt{-3}=-\sqrt{(-2)(-3)}$

③ $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{-4}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}i$

④ $\dfrac{\sqrt{-8}}{\sqrt{-2}}=\sqrt{\dfrac{-8}{-2}}$

⑤ $-\sqrt{-16}=-4i$

해설

③ $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{-4}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2i}=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}i$

10. $\sqrt{-12}+\sqrt{-3}\sqrt{-6}-\dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{-2}}=a+bi$ 일 때, a^2+b^2 의 값은? (단, a, b 는 실수, $i=\sqrt{-1}$)

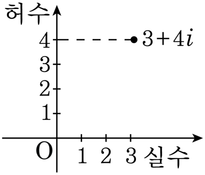
① 15 ② 25 ③ 35 ④ 45 ⑤ 55

해설

$$\sqrt{-12}+\sqrt{-3}\sqrt{-6}-\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{-2}}$$
$$=2\sqrt{3}i-3\sqrt{2}+\sqrt{3}i$$
$$=-3\sqrt{2}+3\sqrt{3}i$$
$$=a+bi$$
따라서, $a=-3\sqrt{2}, b=3\sqrt{3}$

$\therefore\ a^2+b^2=18+27=45$

11. 복소수 $z=a+bi$ (a, b는 실수)를 실수의 순서쌍 $(a,\ b)$로 나타내어 좌표평면 위에 표시할 수 있다. 예를 들어 $3+4i$를 $(3,\ 4)$로 나타내면 다음 그림과 같이 표시할 수 있다. $z=1+i$일 때, 0, z, z^2 이 나타내는 점을 각각 A, B, C 라 할 때, $\triangle ABC$는 어떤 삼각형인가? (단, 가장 정확하게 표시한 것을 하나만 고른다.)



① 정삼각형

② 이등변삼각형

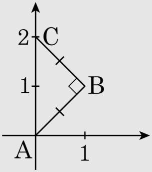
③ 직각삼각형

④ 직각이등변삼각형

⑤ 답 없음

해설

$z = 1+i \quad z^2 = 2i \Rightarrow \quad B(1,\ 1),\ C(0,\ 2)$



$\Rightarrow$ 직각이등변삼각형

※ 이와 같이 복소수의 실수부와 허수부를 순서쌍으로 좌표평면에 나타내는 것을 복소평면이라 한다.

12. 복소수 $(1+i)x^2-(1-4i)x-(2-3i)$가 실수일 때의 x값과 순허수일 때의 x값을 모두 곱한 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

준식을 전개하여 실수부와 허수부로 정리하면

$(x^2-x-2)+(x^2+4x+3)i$

실수가 되기위해서는 $x^2+4x+3=0$

$(x+1)(x+3)=0 \therefore\ x=-3,\ -1$

순허수가 되기 위해서는

$x^2-x-2=0$이고 $x^2+4x+3\neq 0$

$x=-1,\ 2$이고 $x\neq -3,\ -1 \therefore\ x=2$

$(-3)\times(-1)\times 2=6$

13. $a^2(1+i)+a(2+i)-8-6i$가 순허수가 되도록 실수 a의 값을 구하면?

① -10 ② -8 ③ -6 ④ -4 ⑤ -2

해설

$a^2(1+i)+a(2+i)-8-6i$

$=(a^2+2a-8)+i(a^2+a-6)$

$=(a+4)(a-2)+i(a+3)(a-2)$

만약에 $a=2$가 되면 실수가 된다.

$a \neq 2, \therefore\ a=-4$

14. 복소수 $(1+2i)x-(2+i)y+i$를 제곱하였더니 -9가 되었다. 이 때, $x+y$의 값은? (단, $i=\sqrt{-1}$ 이고 x, y는 실수이다.)

① 2 또는 -4 ② 2 또는 -3 ③ -1 또는 3

④ -1 또는 -3 ⑤ -1 또는 -2

해설

$z=(x-2y)+(2x-y+1)i$

$z^2=-9$

즉, z는 순허수이다.

$\therefore x-2y=0,\ (2x-y+1)^2=9$

$x=2y$ 와 $2x-y+1=\pm3$을 연립하여 풀면

$y=\dfrac{2}{3}\rightarrow x=\dfrac{4}{3}$

$y=-\dfrac{4}{3}\rightarrow x=-\dfrac{8}{3}$

$\therefore x+y=2$ 또는 -4 이다.

15. 복소수 $a^2(1+i)+a(3+2i)+2$를 제곱하면 음의 실수가 된다. 이 때, 실수 a의 값을 구하면? (단, $i=\sqrt{-1}$)

① -3 ② -2 ③ -1 ④ 0 ⑤ 1

해설

$(\text{준식}) = \left(a^2+3a+2\right)+\left(a^2+2a\right)i \Rightarrow$ 순허수

즉, $a^2+3a+2=0$

$a^2+2a \neq 0$이므로 $\therefore\ a=-1$

16. $|x-y|+(y-2)i=5x-2-3xi$를 만족하는 실수를 x, y라 할 때, $\dfrac{x}{y}$의 값은? (단, $i^2=-1$)

① $\dfrac{3}{2}$ ② $\dfrac{2}{3}$ ③ $\dfrac{1}{2}$ ④ $\dfrac{1}{3}$ ⑤ $\dfrac{3}{4}$

해설

(i) $x \geq y$일 때,

$(x-y)+(y-2)i=5x-2-3xi$

$x-y=5x-2,\quad y-2=-3x$

$\therefore\ x=0,\ y=2$($x<y$이므로 부적합)

(ii) $x<y$일 때.

$-(x-y)+(y-2)i=5x-2-3xi$

$-x+y=5x-2,\ y-2=-3x$

$\therefore\ x=\dfrac{4}{9},\ y=\dfrac{2}{3}$

$\therefore\ \dfrac{x}{y}=\dfrac{4}{9}\times\dfrac{3}{2}=\dfrac{2}{3}$

17. $\sqrt{(y-x)^2}+(y-1)i=-2x-3i$ 를 만족하는 실수 x, y 에 대하여 $\frac{x}{y}$ 의 값은?

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{4}$ ④ $\frac{1}{5}$ ⑤ $\frac{1}{6}$

해설

$|y-x|+(y-1)i=-2x-3i$

$|y-x|=-2x$

$y-1=-3 \quad \therefore \ y=-2$

(i) $y \geq x$ 일 때

$y-x=-2x,\ y=-x,\ x=2$ (모순)

(ii) $y<x$ 일 때

$x-y=-2x,\ y=3x$

$\therefore \ x=-\frac{2}{3}$ (성립)

$\therefore \ \frac{x}{y}=\frac{x}{3x}=\frac{1}{3}$

18. 다음 등식을 만족시키는 실수 x, y를 구할 때, x^2+y^2 의 값을 구하시오.

$$(1-2xi)(2-yi)=6-2i \text{ (단, } x>0 \text{)}$$

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

$(2-2xy)-(4x+y)i=6-2i$

$2-2xy=6,\ 4x+y=2$

연립하여 x 에 대해 정리하면

$2x^2-x-1=0$

$(x-1)(2x+1)=0$

$\therefore\ x=1(x>0),\ y=-2$

19. 실수 x, y 에 대하여 $\dfrac{x}{1+i} + \dfrac{y}{1-i} = 2-i$ 가 성립할 때, $2x+y$ 의 값은?

① 8 ② 7 ③ 5 ④ 4 ⑤ 2

해설

$$\frac{x}{1+i} + \frac{y}{1-i} = \frac{x(1-i)+y(1+i)}{(1+i)(1-i)}$$
$$= \frac{(x+y)+(-x+y)i}{2}$$

$\therefore \dfrac{(x+y)+(-x+y)i}{2} = 2-i$이므로,

복소수의 상등에서 $x+y=4$, $-x+y=-2$

이것을 풀면 $x=3$, $y=1$

따라서, $2x+y = 2\times3+1 = 7$

20. $(i-1)x^2-3(a+i)x+(5+2i)=0$이 실근을 갖도록 하는 실수 a의 값을 α, β라 할 때, $\alpha-\beta$의 값을 구하면$(\alpha>\beta)$?

① $\frac{7}{6}$ ② $\frac{4}{3}$ ③ $\frac{3}{2}$ ④ $\frac{5}{3}$ ⑤ $\frac{11}{6}$

해설

$(i-1)x^2-3(a+i)x+(5+2i)=0$

$(-x^2-3ax+5)+(x^2-3x+2)i=0$

$-x^2-3ax+5=0\cdots$ ⓐ

$x^2-3x+2=0\cdots$ ⓑ

ⓑ을 인수분해하면,

$(x-1)(x-2)=0$, $\therefore\ x=1,\ 2$

ⓐ에 대입하면,

$x=1$일 때, $-1-3a+5=0$, $\therefore\ a=\frac{4}{3}$

$x=2$일 때, $-4-6a+5=0$, $\therefore\ a=\frac{1}{6}$

$\therefore\ \alpha=\frac{4}{3}$, $\beta=\frac{1}{6}(\because\ \alpha>\beta)$

$\therefore\ \alpha-\beta=\frac{4}{3}-\frac{1}{6}=\frac{7}{6}$

21. $x = 2007,\ y = 4331$ 일 때, $\dfrac{x+yi}{y-xi} + \dfrac{y-xi}{x+yi}$ 의 값은?

① 0　② 1　③ -1　④ i　⑤ $-i$

해설

$$\frac{x+yi}{y-xi} + \frac{y-xi}{x+yi}$$
$$= \frac{(x+yi)^2 + (y-xi)^2}{(y-xi)(x+yi)}$$
$$= \frac{x^2 + 2xyi - y^2 + y^2 - 2xyi - x^2}{(y-xi)(x+yi)}$$
$$= 0$$

해설

$$\frac{x+yi}{y-xi} + \frac{y-xi}{x+yi}$$
$$= \frac{i(y-xi)}{y-xi} + \frac{-i(x+yi)}{x+yi}$$
$$= i + (-i)$$
$$= 0$$

22. $(1+i)^6-(1-i)^6$ 을 간단히 하면? (단, $i=\sqrt{-1}$)

① 16　　② -16　　③ $16i$　　④ $-16i$　　⑤ 0

해설

$(1+i)^2=1+2i+i^2=2i,$

$(1-i)^2=1-2i+i^2=-2i$

$\therefore\ (1+i)^6-(1-i)^6$

$=\{(1+i)^2\}^3-\{(1-i)^2\}^3$

$=(2i)^3-(-2i)^3$

$=8i^3+8i^3$

$=16i^3=-16i$

23. n이 홀수일 때, $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{2n+1}+\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{4n+1}$을 간단히 하면?

① $-2i$ ② $-i$ ③ $2i$ ④ i ⑤ 0

해설

$$\frac{1+i}{1-i}=\frac{2i}{2}=i$$

$$\frac{1-i}{1+i}=\frac{-2i}{2}=-i$$

$i^{2n+1}+(-i)^{4n+1}$ ($n=2k-1$ 대입)

$i^{2(2k-1)+1}+(-i)^{4(2k-1)+1}$

$=i^{4k-1}-i$

$=-i-i=-2i$

24. $f(x)=\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)^{1000}$ 일 때, $f\left(\dfrac{1-i}{1+i}\right)-f\left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)$ 의 값을 구하면?

① i ② 2 ③ 1 ④ 0 ⑤ $2i$

해설

$\dfrac{1-i}{1+i}=-i,\ \dfrac{1+i}{1-i}=i$

$$
\begin{aligned}
&f\left(\frac{1-i}{1+i}\right)-f\left(\frac{1+i}{1-i}\right)\\
&=f(-i)-f(i)\\
&=\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{1000}-\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{1000}\\
&=(-i)^{1000}-(i)^{1000}\\
&=1-1\\
&=0
\end{aligned}
$$

25. $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^7+\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^8$ 을 간단히 하면?

① 0 ② $1-i$ ③ $1+i$ ④ $-2i$ ⑤ $2i$

해설

$\frac{1+i}{1-i}=\frac{2i}{2}=i,\ \frac{1-i}{1+i}=\frac{1}{i}=-i$

$\therefore$ (준식) $=(i)^7+(-i)^8=-i+1$

26. $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{2005}+\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{2005}$ 의 값을 구하면?

① 0　　② i　　③ 1　　④ $1+i$　　⑤ $1-i$

해설

$\frac{1+i}{1-i}=i,\ \frac{1-i}{1+i}=-i$

$$\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{2005}+\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{2005}$$
$$=i^{2005}+(-i)^{2005}$$
$$=(i^4)^{501}\cdot i+((-i)^4)^{501}\cdot(-i)$$
$$=i+(-i)=0$$

27. $z = \dfrac{1+i}{\sqrt{2}}$ 일 때, $z^{100} = (a+bi)z$를 만족시키는 실수 a, b에 대하여 ab의 값을 구하면?

① $-\dfrac{1}{2}$ ② $-\dfrac{1}{4}$ ③ $\dfrac{1}{2}$ ④ $\dfrac{1}{4}$ ⑤ 1

해설

$z^2 = \left(\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^2 = i$ 이므로

$z^{100} = (z^2)^{50} = i^{50} = (i^4)^{12} \cdot i^2 = -1$

$$\therefore \quad -1 = (a+bi)\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}(a-b) + \frac{1}{\sqrt{2}}(a+b)i$$

따라서 복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$\dfrac{1}{\sqrt{2}}(a-b) = -1$, $\dfrac{1}{\sqrt{2}}(a+b) = 0$

$\therefore\ a = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $b = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$\therefore\ ab = -\dfrac{1}{2}$

28. $1+i+i^2+i^3+\cdots+i^{2005}$ 를 간단히 하면?

① $1-i$ ② $1+i$ ③ $-i$ ④ i ⑤ 1

해설

$i+i^2+i^3+i^4=i+(-1)+(-i)+1=0$

$i^4=1$ 이므로

$i^{4k+1}=i, i^{4k+2}=i^2=-1,$

$i^{4k+3}=i^3=-i, i^{4k}=i^4=1$

$$\begin{aligned}(\text{준식}) &= 1+(i+i^2+i^3+i^4)+(i+i^2+i^3+i^4)+\cdots+(i+i^2+i^3+i^4)+i \\ &= 1+i\end{aligned}$$

29. $\left(\dfrac{1-i}{1+i}\right)^n = 1$ 을 만족하는 최소의 자연수 n 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $n = 4$

해설

$\dfrac{1-i}{1+i} = \dfrac{(1-i)^2}{(1+i)(1-i)} = \dfrac{-2i}{2} = -i$ 에서

$n = 1$ 일 때, $\left(\dfrac{1-i}{1+i}\right)^1 = -i$

$n = 2$ 일 때, $\left(\dfrac{1-i}{1+i}\right)^2 = (-i)^2 = -1$

$n = 3$ 일 때, $\left(\dfrac{1-i}{1+i}\right)^3 = (-i)^3 = i$

$n = 4$ 일 때, $\left(\dfrac{1-i}{1+i}\right)^4 = (-i)^4 = 1$

따라서 조건을 만족하는 최소의 자연수는 4 이다.

30. $f(x)=\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{2010}$ 일 때, $f\left(\frac{1-i}{1+i}\right)+f\left(\frac{1+i}{1-i}\right)$ 의 값은?

① -2 ② $-2i$ ③ 0 ④ 2 ⑤ $2i$

해설

$$\frac{1-i}{1+i}=\frac{(1-i)^2}{(1+i)(1-i)}=\frac{-2i}{2}=-i$$

$\frac{1+i}{1-i}=\frac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)}=\frac{2i}{2}=i$ 이므로

$$f\left(\frac{1-i}{1+i}\right)+f\left(\frac{1+i}{1-i}\right)$$
$$=f(-i)+f(i)$$
$$=\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{2010}+\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{2010}$$
$$=i^{2010}+(-i)^{2010}$$
$$=(i^4)^{502}\cdot i^2+\left\{(-i)^4\right\}^{502}\cdot(-i)^2$$
$$=-1+(-1)=-2$$

31. $a = 1 + i$, $b = 1 - i$ 일 때, $\left(\frac{1}{a}\right)^2 + \frac{1}{ab} + \left(\frac{1}{b}\right)^2$ 의 값을 구하면?

① $-\frac{1}{2}$ ② $-\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{3}$ ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ $\frac{1}{4}$

해설

$a^2 = (1+i)^2 = 2i,\ b^2 = (1-i)^2 = -2i$,

$ab = (1+i)(1-i) = 2$

$$\left(\frac{1}{a}\right)^2 + \frac{1}{ab} + \left(\frac{1}{b}\right)^2 = \frac{b^2 + ab + a^2}{a^2 b^2} = \frac{-2i + 2 + 2i}{4} = \frac{1}{2}$$

32. α, β 가 복소수일 때, 다음 중 옳은 것을 <u>모두</u> 고르면? (단, $\overline{\beta}$ 는 β 의 켤레복소수이고 $i = \sqrt{-1}$)

보기

㉠ $\alpha = \overline{\beta}$ 이면 $\alpha + \beta, \alpha\beta$ 는 모두 실수이다.

㉡ $\alpha = \overline{\beta}$ 일 때, $\alpha\beta = 0$ 이면 $\alpha = 0$ 이다.

㉢ $\alpha^2 + \beta^2 = 0$ 이면 $\alpha = 0, \beta = 0$ 이다.

① ㉠　② ㉠ ,㉡　③ ㉡ ,㉢

④ ㉠ ,㉢　⑤ ㉠ ,㉡ ,㉢

해설

$\alpha = a + bi \Rightarrow \overline{\beta} = a + bi$

㉠ $\alpha + \beta = (a + bi) + (a - bi) = 2a$ 는 실수 (T), $\alpha\beta = a^2 + b^2 =$ 실수

㉡ $\alpha\beta = a^2 + b^2 = 0 \Rightarrow a = 0, b = 0$

$\therefore \alpha = 0$ (T)

㉢ 반례 : $\alpha = 1, \beta = i$ 일 때, $\alpha^2 + \beta^2 = 0$

33. 복소수 z 의 켤레복소수를 $\bar{z}$ 라 할 때, $z+3i=\overline{z-zi}$ 를 만족하는 복소수 z 를 구하면? (단, $i=\sqrt{-1}$)

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$z=a+bi$ 라 할 때,

(좌변): $z+3i=a+(b+3)i$

(우변): $z-zi=(a+bi)-(a+bi)i$

$$=(a+b)+(b-a)i$$

$$\therefore\ \overline{z-zi}=(a+b)-(b-a)i$$

(좌변) $=$ (우변) 이므로,

$a+(b+3)i=(a+b)+(a-b)i$

$$\begin{cases} a+b=a \\ a-b=b+3 \Rightarrow a=3,\ b=0 \end{cases}$$

$\therefore\ z=3+0\cdot i=3$

34. 복소수 z의 켤레복소수를 $\bar{z}$라 할 때, $(1+2i)z+5(1-\bar{z}i)=0$을 만족시키는 복소수 z는?

① $1+3i$　② $1-3i$　③ $\frac{1}{2}+\frac{3}{2}i$

④ $\frac{1}{4}+\frac{3}{4}i$　⑤ $\frac{1}{4}-\frac{3}{4}i$

해설

$z=a+bi$ (a, b 는 실수)라 놓으면 $\bar{z}=a-bi$

따라서, 준식은 $(1+2i)(a+bi)+5\{1-(a-bi)i\}=0$

$\therefore\ a-7b+5+(b-3a)i=0$

그런데, a, b가 실수이므로

$a-7b+5=0$, $b-3a=0$

이들을 연립하여 풀면 $a=\frac{1}{4}$, $b=\frac{3}{4}$

$\therefore\ z=\frac{1}{4}+\frac{3}{4}i$

35. $z=\dfrac{\sqrt{2}}{1-i}$ 일 때, $z^4+z^2-\sqrt{2}z+1$ 의 값은?

① -3 ② -2 ③ -1 ④ 0 ⑤ 1

해설

$$z=\frac{\sqrt{2}}{1-i}=\frac{\sqrt{2}(1+i)}{(1-i)(1+i)}=\frac{\sqrt{2}(1+i)}{2}$$

$$z^2=\left(\frac{\sqrt{2}}{1-i}\right)^2=\frac{2}{1-2i+i^2}=\frac{2}{-2i}=-\frac{1}{i}$$
$$=-\frac{i}{i^2}=i$$

$$\therefore\ z^4+z^2-\sqrt{2}z+1=i^2+i-\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{2}(1+i)}{2}+1$$
$$=-1+i-(1+i)+1=-1$$

36. 0 이 아닌 실수 a 가 등식 $\dfrac{\sqrt{a+5}}{\sqrt{a}} = -\sqrt{\dfrac{a+5}{a}}$ 를 만족할 때, $|\,a\,| + \sqrt{(a+5)^2}$ 을 간단히 하면?

① $-2a-5$ ② 5 ③ $2a+5$

④ -5 ⑤ $2a$

해설

$a+5 \geq 0,\ a<0$, $-5 \leq a < 0$

$|\,a\,| + \sqrt{(a+5)^2} = -(a) + (a+5) = 5$

37. $a<0,\ b<0$ 일 때, 다음 등식 중에서 성립하지 않는 것은?

① $\sqrt{a^2b}=-a\sqrt{b}$ ② $\sqrt{a^3b}=-a\sqrt{ab}$

③ $\sqrt{a}\sqrt{b}=\sqrt{ab}$ ④ $\dfrac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}=\sqrt{\dfrac{b}{a}}$

⑤ $\sqrt{a^2b^2}=ab$

해설

$a=-\alpha,\ b=-\beta(\alpha>0,\ \beta>0)$ 로 놓으면

① $\sqrt{a^2b}=\sqrt{\alpha^2(-\beta)}=\alpha\sqrt{-\beta}=-a\sqrt{b}$

② $$\begin{aligned}\sqrt{a^3b}&=\sqrt{(\alpha)^3(-\beta)}\\&=\alpha\sqrt{(-\alpha)(-\beta)}\\&=-a\sqrt{ab}\end{aligned}$$

③ $$\begin{aligned}\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}&=\sqrt{-\alpha}\sqrt{-\beta}\\&=\sqrt{\alpha}i\cdot\sqrt{\beta}i\\&=\sqrt{\alpha\beta}i^2\\&=-\sqrt{\alpha\beta}\\&=-\sqrt{ab}\end{aligned}$$

④ $$\begin{aligned}\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}&=\frac{\sqrt{-\beta}}{\sqrt{-\alpha}}\\&=\frac{\sqrt{\beta}i}{\sqrt{\alpha}i}\\&=\frac{\sqrt{\beta}}{\sqrt{\alpha}}\\&=\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}\\&=\sqrt{\frac{b}{a}}\end{aligned}$$

⑤ $\sqrt{a^2b^2}=\sqrt{(-\alpha)^2(-\beta)^2}=\alpha\beta=ab$

38. 다음 보기 중 옳은 것은 <u>모두</u> 몇 개인가?

㉠ $\sqrt{-2}\sqrt{-5} = \sqrt{10}$	㉡ $\sqrt{-3}\sqrt{12} = -6$
㉢ $(-\sqrt{-2})^2 = -2$	㉣ $(\sqrt{-3})^3 = -3\sqrt{3}i$
㉤ $\dfrac{\sqrt{8}}{\sqrt{-2}} = -2i$	㉥ $\dfrac{\sqrt{-8}}{\sqrt{2}} = -2$

① 2 개 ② 3 개 ③ 4 개 ④ 5 개 ⑤ 6 개

해설

㉢, ㉣, ㉤이 옳다.

㉠ $\sqrt{-2}\sqrt{-5} = -\sqrt{10}$

㉡ $\sqrt{-3}\sqrt{12} = 6i$

㉥ $\dfrac{\sqrt{-8}}{\sqrt{2}} = 2i$

39. 실수 a, b 에 대하여 $\dfrac{\sqrt{b-1}}{\sqrt{a+1}} = -\sqrt{\dfrac{b-1}{a+1}}$ 이 성립할 때, $|a+1| + \sqrt{(b-1)^2}$ 을 간단히 하면?

① $a+b$ ② $a-b$ ③ $b-a$

④ $a-b+2$ ⑤ $b-a-2$

해설

$\dfrac{\sqrt{b-1}}{\sqrt{a+1}} = -\sqrt{\dfrac{b-1}{a+1}}$ 이므로

$a+1<0$, $b-1 \geq 0$

$$\begin{aligned} |a+1| + \sqrt{(b-1)^2} &= |a+1| + |b-1| \\ &= -(a+1) + (b-1) \\ &= -a-1+b-1 \\ &= b-a-2 \end{aligned}$$

40. $\sqrt{-3} \times \sqrt{-4} + \sqrt{-18} \div \sqrt{-6}$ 을 간단히 하면?

① $-3\sqrt{3}$ ② $-2\sqrt{3}$ ③ $-\sqrt{3}$

④ $\sqrt{3}$ ⑤ $2\sqrt{3}$

해설

$$(\text{주어진 식}) = \sqrt{3}i \times 2i + \sqrt{18}i \times \frac{1}{\sqrt{6}i}$$

$$= -2\sqrt{3} + \sqrt{3} = -\sqrt{3}$$

41. $i(x+i)^3$이 실수일 때, 실수 x의 값으로 옳지 않은 것을 모두 고르면?

① 0 ② $\sqrt{3}$ ③ $-\sqrt{3}$ ④ 1 ⑤ -1

해설

$$
\begin{aligned}
i(x+i)^3 &= i(x^3+3x^2i-3x-i) \\
&= (-3x^2+1)+(x^3-3x)i
\end{aligned}
$$

실수가 되기 위해서는 허수부가 0

$\therefore\ x^3-3x=0$

$x(x^2-3)=0$

$\therefore\ x=0,\ \pm\sqrt{3}$

42. 유리수 $a,\ b,\ c,\ d$에 대하여 $(\sqrt{2}+i)^4 + a(\sqrt{2}+i)^3 + b(\sqrt{2}+i)^2 + c(\sqrt{2}+i) + d = 0$을 만족한다. 이 때, $a-b-c-d$의 값은? (단, $i^2=-1$)

① -7　　② 3　　③ 1　　④ -1

해설

$(\sqrt{2}+i)^4 = -7+4\sqrt{2}i$, $(\sqrt{2}+i)^3 = -\sqrt{2}+5i$,

$(\sqrt{2}+i)^2 = 1+2\sqrt{2}i$

$(-7+4\sqrt{2}i)+a(-\sqrt{2}+5i)$

$+b(1+2\sqrt{2}i)+c(\sqrt{2}+i)+d=0$

$(-7-\sqrt{2}a+b+\sqrt{2}c+d)$

$+(4\sqrt{2}+5a+2\sqrt{2}b+c)i=0$

$\therefore\ (-7+b+d)+(c-a)\sqrt{2}=0,$

$(5a+c)+(4+2b)\sqrt{2}=0$

$a,\ b,\ c,\ d$ 는 유리수이므로 $-7+b+d=0$:

$c-a=0,\ 5a+c=0,\ 4+2b=0$

$\therefore\ a=0,\ b=-2,\ c=0,\ d=9$

$\therefore\ a-b-c-d=-7$

43. $\alpha = a + bi$ (a, b는 실수, $i = \sqrt{-1}$)일 때, $\alpha^t = b + ai$라 한다.

$\alpha = \dfrac{\sqrt{3}+i}{2}$일 때, $2\alpha^5(\alpha^t)^4$을 간단히 하면?

① $1+i$ ② $1-i$ ③ $2+i$

④ $2-i$ ⑤ $\sqrt{3}+i$

해설

$\alpha = a + bi,\ \alpha^t = b + ai$이므로

$\alpha\alpha^t = (a+bi)(b+ai) = (a^2+b^2)i$

그런데 $\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}i = a + bi$에서

$a = \dfrac{\sqrt{3}}{2},\ b = \dfrac{1}{2}$ $\quad\therefore\ \alpha\alpha^t = \left(\dfrac{3}{4} + \dfrac{1}{4}\right)i = i$

$\therefore$ (준식)$= 2\alpha(\alpha \cdot \alpha^t)^4 = 2 \cdot \dfrac{\sqrt{3}+i}{2} \cdot i^4 = \sqrt{3}+i$

44. $f(x)=\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)^{98}$ 일 때, $f\left(\dfrac{1-i}{1+i}\right)+f\left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -2

해설

$\dfrac{1-i}{1+i}=-i, \dfrac{1+i}{1-i}=i$ 이므로

$$f\left(\frac{1-i}{1+i}\right)+f\left(\frac{1+i}{1-i}\right)$$
$$=f(-i)+f(i)$$
$$=\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{98}+\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{98}$$
$$=i^{98}+(-i)^{98}$$
$$=i^2+i^2$$
$$=-2$$

45. 복소수들 사이의 연산 $*$가 다음과 같다고 하자.

$\alpha * \beta = \alpha + \beta + \alpha\beta i$

이 때, $(1+2i) * z = 1$을 만족시키는 복소수 z는?(단, $i = \sqrt{-1}$)

① $1+i$　　② $1-i$　　③ $-1+i$

④ $-1-i$　　⑤ i

해설

$z = a + bi$라 하면

$(1+2i) * z$

$= (1+2i) + (a+bi) + (1+2i)(a+bi)i$

$= (-a-b+1) + (a-b+2)i = 1$

$-a-b+1 = 1,\ a-b+2 = 0$

$a = -1,\ b = 1$

$\therefore\ z = -1+i$

46. α, β가 복소수일 때, 다음 중 옳은 것의 개수는?(단, $\overline{\alpha}$, $\overline{\beta}$는 각각 α, β의 켤레복소수이고, $i = \sqrt{-1}$이다.)

㉠ $\alpha = \overline{\beta}$이면 $\alpha+\beta$, $\alpha\beta$는 모두 실수이다.
㉡ $\alpha = \overline{\beta}$일 때, $\alpha\beta = 0$이면 $\alpha = 0$이다.
㉢ $\alpha^2 + \beta^2 = 0$이면 $\alpha = 0$, $\beta = 0$이다.
㉣ $\alpha + \beta i = 0$이면 $\alpha = 0$, $\beta = 0$이다.

① 1개 ② 2개 ③ 3개 ④ 4개 ⑤ 없다

해설

㉠ $\alpha = a + bi$ (a, b는 실수)라 하면

$\alpha = \overline{\beta}$이므로 $\beta = a - bi$

$\therefore\ \alpha + \beta = (a+bi) + (a-bi) = 2a$

$\alpha\beta = (a+bi)(a-bi) = a^2 + b^2$

$\therefore\ \alpha+\beta$, $\alpha\beta$는 실수이다.

㉡ :㉠에서 $\alpha\beta = a^2 + b^2 = 0$, a, b는 실수이므로 $a = 0$, $b = 0$ 즉, $= a + bi = 0$이다.

㉢ :(반례) $\alpha = i$, $\beta = 1$

$\therefore\ \alpha^2 + \beta^2 = i^2 + 1^2 = 0$

㉣ :(반례) $\alpha = 1$, $\beta = i$

$\therefore\ \alpha + \beta i = 0$

$\therefore$ ㉢, ㉣는 α, β가 실수일 때만 성립한다.

47. 두 실수 a, b에 대하여 복소수 $z = a + bi$와 켤레복소수 $\bar{z} = a - bi$의 곱 $z\bar{z} = 5$일 때, $\frac{1}{2}\left(z + \frac{5}{z}\right)$를 간단히 하면?

① b　② $2b$　③ 0　④ $5a$　⑤ a

해설

$z\bar{z} = 5, \quad \bar{z} = \frac{5}{z}$

$\therefore \frac{1}{2}\left(z + \frac{5}{z}\right) = \frac{1}{2}(z + \bar{z}) = \frac{1}{2} \times 2a = a$

48. 복소수 $z = a + bi$ $(a, b$: 실수$)$에 대하여 $< z >= b + ai$로 나타낸다. $z = \dfrac{4+3i}{5}$일 때, $5z^5 < z >^4$의 값을 구하면?

① $3 + 4i$ ② $4 + 3i$ ③ $5 + 4i$

④ $5 + 3i$ ⑤ $4 + 5i$

해설

$$z < z >= (a+bi)(b+ai) = (a^2+b^2)i$$

$z = \dfrac{4+3i}{5}$ 이므로

$$z < z >= \left\{ \left(\frac{4}{5}\right)^2 + \left(\frac{3}{5}\right)^2 \right\} i = i$$

$$\begin{aligned} \therefore \ 5z^5 < z >^4 &= 5z(z < z >)^4 \\ &= 5\left(\frac{4+3i}{5}\right)(i)^4 \\ &= 4 + 3i \end{aligned}$$

49. $\alpha = \dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ 일 때, $\alpha^3 + 2\alpha^2 + 2\alpha + 5$ 의 값을 구하면?

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

해설

$\alpha = \dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$

$2\alpha = -1 + \sqrt{3}i$

$2\alpha + 1 = \sqrt{3}i$

양변을 제곱하여 정리하면

$\alpha^2 + \alpha + 1 = 0$

$\alpha^3 + 2\alpha^2 + 2\alpha + 5$

$= \alpha(\alpha^2 + \alpha + 1) + (\alpha^2 + \alpha + 1) + 4$

$= 4$

해설

$\alpha^2 + \alpha + 1 = 0$ 을 얻은 후 $\alpha^3 + 2\alpha^2 + 2\alpha + 5$ 를 $\alpha^2 + \alpha + 1$ 로 나누면

$\alpha^3 + 2\alpha^2 + 2\alpha + 5$

$= (\alpha^2 + \alpha + 1)(\alpha + 1) + 4$

$= 4 \ (\because \ \alpha^2 + \alpha + 1 = 0)$

50. $\dfrac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}} = -\sqrt{\dfrac{y}{x}}$ 가 성립할 때,

$\sqrt{(y-x+1)^2} + \sqrt[3]{x^3 - y^3 - 3xy(x-y)} + |x|$ 를 간단히 하면?

① $x-1$ ② $-x+1$ ③ $2y-3x+1$

④ $3x-2y-1$ ⑤ $-3x-2y-1$

해설

$\dfrac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}} = -\sqrt{\dfrac{y}{x}}$ 일 때, $y \geq 0,\ x < 0$

$$\text{(준식)} = |y-x+1| + \sqrt[3]{(x-y)^3} + |x|$$
$$= y - x + 1 + x - y - x = -x + 1$$