1. 다음 중 정의역이 $\{0, 1, 2\}$ 인 함수 f 의 그래프가 될 수 있는 것은?

① $\{(0,1),(1,2)\}$　　② $\{(0,1),(1,1),(2,1)\}$

③ $\{(1,2),(1,0),(2,2)\}$　　④ $\{(0,1),(0,2),(2,0)\}$

⑤ $\{(2,1),(2,2),(2,3)\}$

해설

$f(0)=a,\ f(1)=b,\ f(2)=c$ 라 하면,
함수 f 의 그래프는
$(0,a),(1,b),(2,c)$ 의 꼴이어야 한다.

2. 공집합이 아닌 두 집합 X, Y에 대하여 X에서 Y로의 함수 $f(x) = x^2 - x - 3$, $g(x) = x + 5$에 대하여 $f = g$일 때, 정의역 X가 될 수 있는 집합의 개수는 a개이다. a의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 3

해설

$f(x) = g(x)$이므로 집합 X는 방정식 $f(x) = g(x)$를 만족하는 x의 값을 원소로 갖는 집합이다.
$x^2 - x - 3 = x + 5$에서 $x^2 - 2x - 8 = 0$, $(x - 4)(x + 2) = 0$
$\therefore x = 4$ 또는 $x = -2$
즉, 집합 $\{-2, 4\}$의 공집합이 아닌 부분집합이 정의역 X가 될 수 있으므로 집합 X의 개수는 $2^2 - 1 = 3$(개)이다.
$\therefore a = 3$

3. $X = \{x \mid -1 \le x \le 2\}$, $Y = \{y \mid 0 \le y \le 3\}$ 일 때 함수$f : X \to Y, y = ax + b(a < 0)$ 가 일대일 대응이 되는상수 a, b 의 값의 합은?

① -1 ② 0 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

해설

$f(x) = ax + b$ 는 $a < 0$ 이므로 감소함수이다.
$\therefore\ x = -1$ 일 때, $f(x)$ 는 최대이고
$-a + b = 3$
$x = 2$ 일 때 $f(x)$ 는 최소이며
$2a + b = 0$ 두 식을 연립하면 $a = -1, b = 2$
$\therefore\ a + b = 1$

4. $f(x) = 2x - 3$일 때, $f(f(x)) = f(f(f(x)))$를 만족하는 x의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$f(f(x)) = 4x - 9,\quad f(f(f(x))) = 8x - 21$ 이므로

$4x - 9 = 8x - 21$

$\therefore\ x = 3$

5. 두 함수 $f(x) = ax + b$, $g(x) = 3x - 2$에 대하여 $(f \circ g)(1) = 2$, $(g \circ f)(2) = 3$을 만족하는 상수 a, b의 합 $4a + b$를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$(f \circ g)(1) = 2$에서
$(f \circ g)(1) = f(g(1)) = f(1) = a + b$
$\therefore a + b = 2$

6. 두 함수 $f(x) = \dfrac{x-1}{x+2}$, $g(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$ 에 대하여 함수 $h(x)$ 가 $f(h(x)) = g(x)$를 만족시킨다. 이 때 $h(2)$의 값은?

① $\frac{7}{2}$ ② $\frac{5}{2}$ ③ $\frac{3}{2}$ ④ $-\frac{7}{2}$ ⑤ $-\frac{3}{2}$

해설

$f(h(x)) = \dfrac{h(x)-1}{h(x)+2} = \dfrac{x+1}{x-1} = g(x)$

$(x-1)\{h(x)-1\} = (x+1)\{h(x)+2\}$

$2h(x) = -3x-1$

$\therefore\ h(x) = \dfrac{-3x-1}{2}$

$\therefore\ h(2) = -\dfrac{7}{2}$

해설

$f(h(2)) = g(2)$ 에서, $h(2) = a$ 라 두면, $g(2) = 3$ 이므로

$f(a) = 3$, $\dfrac{a-1}{a+2} = 3$

이를 풀면 $\therefore\ a = h(2) = -\dfrac{7}{2}$

7. 두 함수 $f(x) = 2x-1, g(x) = x+2$ 에 대하여 $(f^{-1} \circ g^{-1})(x)$ 를 구하면?

① $\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$ ② $\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$ ③ $2x-\frac{1}{2}$
④ $2x+1$ ⑤ $2x+2$

해설

$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(2x-1) = 2x-1+2$
$= 2x+1$

$(g \circ f)(x) = y$ 라 하면 $y = 2x+1$ 에서 $x = \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}$

$y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$

$(f^{-1} \circ g^{-1})(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$

8. 함수 $y = 2\,|\,x - 1\,|\,-2$ 의 그래프와 x 축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

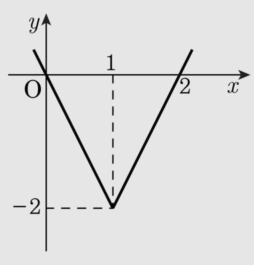
해설

$y = 2\,|\,x - 1\,|\,-2$

(i) $x < 1$ 일 때, $y = -2(x - 1) - 2 = -2x$

(ii) $x \geq 1$ 일 때, $y = 2(x - 1) - 2 = 2x - 4$

따라서 $y = 2\,|\,x - 1\,|\,-2$ 의 그래프와 x 축으로 둘러싸인 부분의 넓이는 다음 그림에서



$\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 = 2$

9. 함수 $f(x) = [x]^2 - 2[x] - 3$ 에 대한 다음 보기의 설명 중 옳은 것을 모두 고르면? (단, $[x]$ 는 x 보다 크지 않은 최대의 정수이다.)

보기

㉠ $f\left(\frac{1}{2}\right) = -3$

㉡ 치역은 $\{x \mid x \geq -3\}$ 이다.

㉢ $x_1 < x_2$ 이면 $f(x_1)f(x_2)$ 이다.

① ㉠　② ㉢　③ ㉠, ㉢
④ ㉡, ㉢　⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

㉠ $\left[\frac{1}{2}\right] = 0$ 이므로 $f\left(\frac{1}{2}\right) = -3$

㉡ $f(x) = [x]^2 - 2[x] - 3 = ([x] - 1)^2 - 4$ 이므로 $f(x) \geq -4$
따라서 치역은 $\{f(x) \mid f(x) \geq -4,\ f(x)$는 정수$\}$이다.

㉢ [반례] $x_1 = -1,\ x_2 = 3$ 일 때
$f(x_1) = f(-1) = [-1]^2 - 2[-1] - 3 = 0$
$f(x_2) = f(3) = [3]^2 - 2[3] - 3 = 0$ 이므로
$x_1 < x_2$ 이지만 $f(x_1) = f(x_2)$ 이다.

이상에서 옳은 것은 ㉠뿐이다.

10. $\dfrac{x+3}{(x+1)(x+2)} = \dfrac{a}{x+1} + \dfrac{b}{x+2}$ 을 만족할 때, a^2+b^2 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 5

해설

$$\frac{x+3}{(x+1)(x+2)} = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x+2}$$
$$= \frac{(a+b)x+2a+b}{(x+1)(x+2)}$$

$a+b=1, 2a+b=3$

$\therefore\ a=2,\ b=-1$

$\therefore\ a^2+b^2 = 2^2+(-1)^2 = 5$

11. 번분수식 $1-\dfrac{\dfrac{1}{a}-\dfrac{2}{a+1}}{\dfrac{1}{a}-\dfrac{2}{a-1}}$ 를 간단히 하면?

① $\dfrac{a}{(a+1)^2}$ ② $\dfrac{2a}{(a+1)^2}$ ③ $\dfrac{3a}{(a+1)^2}$
④ $\dfrac{4a}{(a+1)^2}$ ⑤ $\dfrac{5a}{(a+1)^2}$

해설

$$(\text{준 식})=1-\dfrac{\dfrac{-(a-1)}{a(a+1)}}{\dfrac{-(a+1)}{a(a-1)}}=1-\dfrac{(a-1)^2}{(a+1)^2}$$
$$=\dfrac{4a}{(a+1)^2}$$

12. 등식 $\frac{4}{11} = \cfrac{1}{a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c}}}$ 을 만족시키는 세 자연수 a, b, c 에 대하여 $a^2+b^2+c^2$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 14

해설

$\frac{4}{11} = \cfrac{1}{a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c}}}$ 에서

$a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c}} = \frac{11}{4} = 2+\frac{3}{4}$ 이므로

$a=2$ 이고 $\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c}} = \frac{3}{4}$

이 때, $b+\frac{1}{c} = \frac{4}{3} = 1+\frac{1}{3}$ 이므로 $b=1,\ c=3$

$\therefore a^2+b^2+c^2 = 2^2+1^2+3^2 = 14$

13. $\frac{a+b}{5}=\frac{2b+c}{4}=\frac{c}{3}=\frac{2a+8b-c}{x}$ 에서 x 의 값을 구하시오.

▶ 답 :

▷ 정답 : $x=10$

해설

$$\frac{a+b}{5}=\frac{2b+c}{4}=\frac{c}{3}$$
$$=\frac{2(a+b)+3(2b+c)-4c}{2\times5+3\times4+(-4)\times3}$$
$$=\frac{2a+8b-c}{10}$$
$\therefore x=10$

14. 유리함수 $y=\frac{4x+3}{x+2}$의 그래프는 함수 $y=\frac{a}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 b만큼, y축의 방향으로 c만큼 평행 이동한 것이다. 이 때 $a+b+c$의 값은?

① -4 ② -3 ③ -2 ④ -1 ⑤ 0

해설

$y=\frac{4x+3}{x+2}=\frac{4(x+2)-5}{x+2}=4+\frac{-5}{x+2}$ 이므로

$y=\frac{-5}{x}$의 그래프를 x축 방향으로 -2,

y축 방향으로 4만큼 평행이동한 것이므로

$a+b+c=(-5)+(-2)+4=-3$

15. 함수 $y=\dfrac{ax+b}{2x+c}$가 점 $(1,2)$를 지나고 점근선이 $x=2, y=1$일 때, $a+b+c$의 값은?

① -8 ② -6 ③ -4 ④ -2 ⑤ 0

해설

점근선이 $x=2,\ y=1$이므로

$y=\dfrac{ax+b}{2x+c}=\dfrac{k}{x-2}+1$

또 점 $(1,2)$를 지나므로

$2=\dfrac{k}{1-2}+1\ \ \therefore k=-1$

$\therefore y=\dfrac{ax+b}{2x+c}=\dfrac{-1}{x-2}+1=\dfrac{x-3}{x-2}=\dfrac{2x-6}{2x-4}$

$\therefore a=2, b=-6, c=-4$

$\therefore a+b+c=-8$

16. 분수함수 $y=\frac{3x-1}{x+2}$ 의 그래프에 대한 설명 중 옳지 않은 것을 모두 고른 것은?

㉠ $y=\frac{-1}{x}$ 의 그래프를 x축으로 -2, y축으로 2만큼 평행이동한 그래프이다. ㉡ 점근선의 식은 $x=-2,\ y=2$이다. ㉢ 두 직선 $y=-x+1,\ y=x+5$에 대해 대칭인 곡선이다.

① ㉢　　② ㉠, ㉡　　③ ㉠, ㉢
④ ㉡, ㉢　　⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

$y=\frac{3x-1}{x+2}=\frac{-7}{x+2}+3$

㉠ 이 분수함수는 $y=\frac{-7}{x}$ 을 x축으로 -2, y축으로 3만큼 평행이동 시킨 것이다.

㉡ 점근선은 $x=-2,\ y=3$이다.

㉢ 대칭되는 직선은 기울기가 ±1이고 $(-2,\ 3)$을 지나는 직선이다.

$\Rightarrow\ y=-x+1,\ \ y=x+5$

17. 무리식 $\sqrt{2-x}+\dfrac{1}{\sqrt{x+3}}$ 의 값이 실수가 되도록 x의 범위를 정할 때, 정수 x의 개수는?

① 2개 ② 3개 ③ 4개 ④ 5개 ⑤ 6개

해설

$2-x \geq 0,\ x+3>0$

$\therefore -3<x \leq 2$ 이므로 정수의 개수는 5개

18. 다음 설명 중 옳은 것은?

① $a > 0, b > 0$일 때, $\sqrt{a+b-2\sqrt{ab}} = \sqrt{a} - \sqrt{b}$이다.

② 모든 실수 a, b에 대하여 $\sqrt{a}\sqrt{b} = \sqrt{ab}$이다.

③ 무리식 $x + \sqrt{4-x}$가 실수가 되기 위한 x의 값의 범위는 $0 \le x \le 4$이다.

④ 실수 x에 대하여 $(\sqrt{x})^2 = x$이다.

⑤ $x > 2$일 때, $\sqrt{(2-x)^2} = 2 - x$이다.

해설

① $b > a > 0$이면, $\sqrt{b} - \sqrt{a}$

② $a < 0,\ b < 0$이면, $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = -\sqrt{ab}$

③ $x + \sqrt{4-x}$가 실수가 되기 위해서는

$4 - x \ge 0 \therefore x \le 4$

⑤ $2 - x < 0,\ \sqrt{(2-x)^2} = |2-x| = -(2-x)$

$= x - 2$

19. $f(x) = \sqrt{x} + \sqrt{x+1}$일 때, $\dfrac{1}{f(1)} + \dfrac{1}{f(2)} + \cdots + \dfrac{1}{f(99)}$의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 9

해설

$f(x) = \sqrt{x} + \sqrt{x+1}$ 이므로

$\dfrac{1}{f(x)} = \sqrt{x+1} - \sqrt{x}$

$\therefore$ (준 식) $= (\sqrt{2} - 1) + (\sqrt{3} - \sqrt{2}) + (\sqrt{4} - \sqrt{3}) + \cdots + (\sqrt{100} - \sqrt{99})$

$= \sqrt{100} - 1 = 10 - 1 = 9$

20. $\sqrt{10+\sqrt{96}}$의 정수 부분을 a, 소수 부분을 b라 할 때, $a+b+\dfrac{2}{a+b}$의 값을 구하면?

① $2\sqrt{6}$　　② $\sqrt{6}$　　③ $2-\sqrt{6}$
④ $3+\sqrt{6}$　　⑤ $3+\sqrt{3}$

해설

$$\sqrt{10+\sqrt{96}} = \sqrt{10+2\sqrt{24}} = \sqrt{(\sqrt{6}+\sqrt{4})^2}$$
$$= \sqrt{6}+2,\ 2+\sqrt{6} = 4.\times\times\times$$

$\therefore$ 정수 부분 a : 4 소수 부분 b : $= \sqrt{6}-2$

$$\Rightarrow a+b+\frac{2}{a+b} = 2+\sqrt{6}+\frac{2}{2+\sqrt{6}}$$
$$= \sqrt{6}+2+\frac{2(\sqrt{6}-2)}{(\sqrt{6}+2)(\sqrt{6}-2)}$$
$$= 2\sqrt{6}$$

21. $x = \sqrt{10 + 8\sqrt{3 + \sqrt{8}}}$일 때 $x^2 - 8x$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -14

해설

$x = \sqrt{10 + 8\sqrt{3 + \sqrt{8}}}$

$= \sqrt{10 + 8\sqrt{(2+1) + 2\sqrt{2 \cdot 1}}}$

$= \sqrt{10 + 8(\sqrt{2} + 1)} = \sqrt{18 + 8\sqrt{2}}$

$= \sqrt{18 + 2\sqrt{32}} = \sqrt{(16+2) + 2\sqrt{16 \cdot 2}}$

$= \sqrt{16} + \sqrt{2} = 4 + \sqrt{2}$

$\therefore\ x - 4 = \sqrt{2}$

양변을 제곱하면 $(x-4)^2 = (\sqrt{2})^2$

$x^2 - 8x + 16 = 2$

$\therefore\ x^2 - 8x = -14$

22. 분수함수 $y=\dfrac{ax-1}{x+b}$ 의 점근선이 $x=-2$, $y=3$ 일 때, 무리함수 $y=\sqrt{ax+b}$ 의 정의역은? (단, a, b 는 상수)

① $\{x \mid x \le -3\}$ ② $\left\{x \mid x \le -\dfrac{2}{3}\right\}$ ③ $\left\{x \mid x \ge -\dfrac{2}{3}\right\}$
④ $\left\{x \mid x \ge \dfrac{2}{3}\right\}$ ⑤ $\{x \mid x \ge 3\}$

해설

$y=\dfrac{-ab-1}{x+b}+a$ 이므로

점근선은 $x=-b$, $y=a \therefore a=3, b=2$

$y=\sqrt{3x+2}$ 의 정의역은 $\left\{x \mid x \ge -\dfrac{2}{3}\right\}$ 이다.

23. 무리함수 $y = \sqrt{ax}$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼 평행이동한 후 y축에 대하여 대칭이동하면 점(1, 3)을 지난다. 이 때, 상수 a의 값은?

① -3 ② -2 ③ -1 ④ 2 ⑤ 3

해설

$y = \sqrt{ax}$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼 평행 이동한 함수의 그래프의 식은
$y = \sqrt{a(x-2)}$
이것을 다시 y축에 대하여 대칭이동한 함수의 그래프의 식은 $y = \sqrt{a(-x-2)}$
이 때, 이 그래프가 점(1, 3)을 지나므로
$3 = \sqrt{-3a}$, $-3a = 9$
$\therefore\ a = -3$

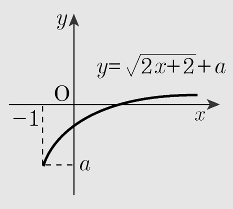
24. 함수 $y = \sqrt{2x+2}+a$ 의 그래프가 제 1 , 3 , 4 사분면을 지나도록 하는 정수 a의 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -2

해설

$y = \sqrt{2x+2}+a = \sqrt{2(x+1)}+a$
주어진 함수는 $y = \sqrt{2x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 -1 만큼, y 축의 방향으로 a 만큼 평행이동한 것이다.
따라서 이 함수의 그래프가 제 1 , 3 , 4 사분면을 지나려면 $x = 0$ 일 때, $y < 0$이어야 한다.



$\sqrt{2}+a < 0$ 이므로 $a < -\sqrt{2}$
따라서 정수 a의 최댓값은 -2이다.

25. $y=-\sqrt{4-2x}+1$의 그래프에 대한 다음 설명 중 옳지 않은 것은?

① 정의역은 $\{x \mid x \le 2\}$이다.

② 치역은 $\{y \mid y \le 1\}$이다.

③ 평행이동하면 $y=-\sqrt{2x}$와 겹쳐진다.

④ 그래프는 제 2사분면을 지나지 않는다.

⑤ 이 그래프는 x축과 점 $\left(\frac{3}{2},\ 0\right)$에서 만난다.

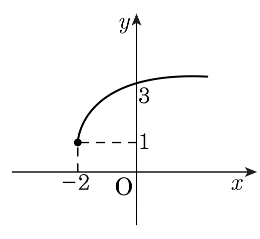
해설

③ 평행이동하면 $y=-\sqrt{-2x}$와 겹쳐진다.

④, ⑤ 꼭지점이 $(2,\ 1)$이고 $\left(\frac{3}{2},\ 0\right)$을 지난다.

$\therefore$ 1, 3, 4, 분면을 지난다.

26. 무리함수 $y = \sqrt{ax+b}+c$ 의 그래프가 다음 그림과 같을 때, $a+b+c$ 의 값을 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : 7

해설

주어진 그래프는 $y = \sqrt{ax}$ 의 그래프를 x 축으로 -2 만큼, y 축으로 1만큼 평행이동한 것과 같으므로 $y = \sqrt{a(x+2)}+1$
또, 점 $(0, 3)$ 을 지나므로
$3 = \sqrt{2a}+1,\ \sqrt{2a} = 2$
$\therefore\ a = 2$
따라서 $y = \sqrt{2(x+2)}+1 = \sqrt{2x+4}+1$ 이고,
이것이 $y = \sqrt{ax+b}+c$ 와 일치하므로
$a = 2,\ b = 4,\ c = 1$
$\therefore\ a+b+c = 7$

27. $1 \leq x \leq a$일 때, $y = \sqrt{2x-1}+3$의 최솟값이 m, 최댓값이 6이다. $a+m$의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 9

해설

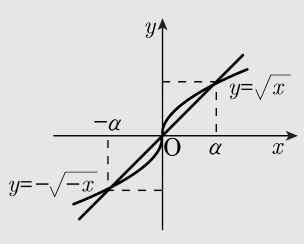
$1 \leq x \leq a$에서, 함수 $y = \sqrt{2x-1}+3$은 증가함수이므로
$x=1$ 일때 최솟값을 가진다.
곧, $m = \sqrt{2-1}+3=4$
$\therefore m=4$
또한, $x=a$일 때 최댓값을 가지므로
$6=\sqrt{2a-1}+3$
$\therefore a=5$
$\therefore a+m=9$

28. 원점을 지나는 직선이 두 함수 $y = \sqrt{x}$, $y = -\sqrt{-x}$의 그래프와 서로 다른 세 점에서 만날 때, 세 점의 x좌표의 값의 합을 구하면?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

두 함수 $y = \sqrt{x}$, $y = -\sqrt{-x}$ 의 그래프는
원점에 대하여 대칭이므로
다음 그림과 같이 원점을 지나는 직선과 서로 다른 세 점에서 만날 때, 세 점의 x 좌표의 값의 합은 항상 0 이다.



29. $y = \sqrt{x-1} + 2$의 역함수는?

① $y = x^2 + 4x + 3(x \geq 2)$ ② $y = x^2 - 4x + 5(x \geq 2)$
③ $y = x^2 + 4x + 3(x \geq 1)$ ④ $y = x^2 - 4x + 5(x \geq 1)$
⑤ $y = x^2 - 3x + 2(x \geq 3)$

해설

$y - 2 = \sqrt{x-1}$ 에서 $\sqrt{x-1} \geq 0$이므로 $y \geq 2$
또 양변을 제곱하면, $(y-2)^2 = x - 1$
$\therefore\ x = y^2 - 4y + 5\ (y \geq 2)$
x와 y를 바꾸면 $y = x^2 - 4x + 5\ (x \geq 2)$

30. 실수 전체의 집합에서 함수 $f(x)$ 가

$f(x)=\begin{cases} 2-x & (x\text{는 유리수}) \\ x & (x\text{는 무리수}) \end{cases}$ 로 정의될 때, $f(x)+f(2-x)$ 의 값은?

① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

해설

함수 $f(x)=\begin{cases} 2-x & (x\text{는 유리수}) \\ x & (x\text{는 무리수}) \end{cases}$ 에서

(i) x 가 유리수일 때, $2-x$ 도 유리수이므로

$f(x)+f(2-x)=(2-x)+\{2-(2-x)\}=2$

(ii) x 가 무리수일 때, $2-x$ 도 무리수이므로

$f(x)+f(2-x)=x+(2-x)=2$

(i), (ii) 에서 $f(x)+f(2-x)=2$

31. 집합 $U = \{1, 2, 3, 4\}$ 의 부분집합 X, Y 가 $X \cup Y = U,\ X \cap Y = \varnothing$ 을 만족한다고 한다. 이 때, X 에서 Y 로의 일대일 대응이 되는 함수 f 의 개수를 구하면?

▶ 답 : ______ 개

▷ 정답 : 12 개

해설

$U = \{1, 2, 3, 4\}$ 에서 $X,\ Y \subset U,\ X \cup Y = U,$
$X \cup Y = \varnothing$ 이다.
$f\ :\ X\ \rightarrow\ Y$ 이 일대일 대응이 되려면
$n(X) = n(Y)$
$n(X \cup Y) = n(U) = 4,\ X \cup Y = \varnothing$ 이므로
$n(X) + n(Y) = 4$ 이다.
$\therefore\ n(X) = n(Y) = 2$
$X = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}\}$ 의 6 가지 경우가 생기며
X 에서 Y 로의 대응방법이 각각 2 가지씩 생기므로
$\therefore\ 2 \times 6 = 12$

32. 집합 $X=\{a,b,c\}$, $Y=\{1,2,3,4\}$ 에 대하여 함수 $f:X\to Y$ 에서 치역의 원소의 개수가 2 개인 함수 f 의 개수를 구하시오.

▶ 답: ________ 개

▷ 정답: 36 개

해설

원소가 2 개인 치역은
$\{1,\ 2\}$, $\{1,\ 3\}$, $\{1,\ 4\}$, $\{2,\ 3\}$, $\{2,\ 4\}$,
$\{3,\ 4\}$로 6 개이다.
정의역의 원소가 3 개, 공역의 원소가 2 개인함수의 개수는
$2^3=8$ 인데
이 중에서 치역의 원소가 1 개인 함수가 각각 2 개이므로 $8-2=6$
따라서 $6\times6=36$ 개

33. 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 f 가 $f\left(\dfrac{3x+1}{2}\right)=6x-5$ 일 때, $f(2x+1)$ 을 구하면?

① $x-1$ ② $2x-2$ ③ $4x-2$
④ $6x-3$ ⑤ $8x-3$

해설

$\dfrac{3x+1}{2}=t$ 라 하면 $2t=3x+1$

$\therefore x=\dfrac{2t-1}{3}$

$f\left(\dfrac{3x+1}{2}\right)=6x-5$ 에서

$f(t)=6\cdot\dfrac{2t-1}{3}-5=4t-7$

$\therefore f(2x+1)=4(2x+1)-7=8x-3$

34. 함수 $f_n(x)$가 $f_1(x) = \frac{x}{x+1}$, $f_{n+1}(x) = (f_1 \circ f_n)(x)$ $(n = 1, 2, 3, \cdots$ $)$으로 정의될 때, $f_{28}\left(\frac{1}{2}\right)$ 의 값은?

① $\frac{1}{20}$　② $\frac{1}{24}$　③ $\frac{1}{30}$　④ $\frac{1}{32}$　⑤ $\frac{1}{40}$

해설

$f_1(x) = \frac{x}{x+1}$ 이고

$f_{n+1}(x) = (f_1 \circ f_n)(x)$ 이므로

$$f_2(x) = \frac{\frac{x}{x+1}}{\frac{x}{x+1}+1} = \frac{\frac{x}{x+1}}{\frac{2x+1}{x+1}} = \frac{x}{2x+1}$$

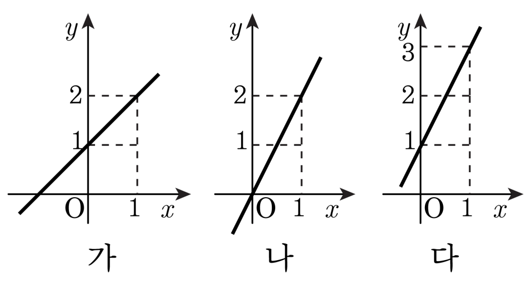
$$f_3(x) = \frac{\frac{x}{2x+1}}{\frac{x}{2x+1}+1} = \frac{\frac{x}{2x+1}}{\frac{3x+1}{2x+1}} = \frac{x}{3x+1}$$

$$\vdots$$

$$f_{28}(x) = \frac{x}{28x+1}$$

$$\therefore\ f_{28}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\frac{1}{2}}{15} = \frac{1}{30}$$

35. 다음 그림은 함수 $f(x)$, $g(x)$, $w(x)$ 의 그래프를 차례로 나타낸 것이다.



다음 중 $w(x)$를 $f(x)$와 $g(x)$를 이용하여 나타낸 것은?

① $f \circ g$　② $g \circ f$　③ $f \circ f$　④ $f + g$　⑤ $f - g$

해설

그래프를 보고 함수식을 구하면
$f(x) = x + 1,\ g(x) = 2x,\ w(x) = 2x + 1$ 이다.
$f(g(x)) = f(2x) = 2x + 1 = w(x)$ 이므로
$\therefore\ w = f \circ g$

36. 역함수가 존재하는 두 함수 $f(x) = ax + b$, $g(x) = 4x + 1$ 에 대하여 $(f \circ (g \circ f)^{-1} \circ g)(9)$ 의 값은?

① 1　② 3　③ 5　④ 7　⑤ 9

해설

$(g \cdot f)^{-1}(x) = (f^{-1} \cdot g^{-1})(x)$ 이므로

$$\begin{aligned}(f \circ (g \circ f)^{-1} \circ g)(9) &= (f \circ f^{-1} \circ g^{-1} \circ g)(9) \\ &= (\mathrm{I} \circ \mathrm{I})(9) \\ &= 9\end{aligned}$$

37. $f(5)=10$, $f(10)=30$ 이고 $g(x)=ax-10$ 인 두 함수$f(x)$, $g(x)$ 에 대하여 $f^{-1}\circ g=f$ 를 만족하는 상수 a의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $a=8$

해설

$f\circ(f^{-1}\circ g)=f\circ f$ 에서

$g=f\circ f\cdots$ ㉠

$g(5)=f(f(5))=f(10)=30\cdots$ ㉡

$\therefore\ 5a-10=30$

따라서 구하는 a 의 값은 8 이다.

38. 함수 $f(x)=\begin{cases} x^2-2x+1 & (x \ge 1) \\ -\sqrt{1-x} & (x<1) \end{cases}$ 에 대하여 $f(x)$ 의 역함수가 존재할 때, $(f^{-1}\circ f^{-1})(x)=1$ 일 때, x 의 값을 구하면? (단, $f^{-1}(x)$ 은 $f(x)$ 의 역함수)

① -2　② -1　③ 0　④ 1　⑤ 2

해설

$f(x)=\begin{cases} x^2-2x+1 & (x \ge 1) \\ -\sqrt{1-x} & (x<1) \end{cases}$ 에서

$(f^{-1}\circ f^{-1})(x)=(f\circ f)^{-1}(x)=1$

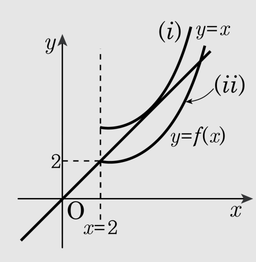
$(f\circ f)(1)=(f(f(1))=f(0)=-1$

$\therefore\ x=-1$

39. 함수 $f(x) = x^2 - 4x + k(x \geq 2)$ 의 그래프와 그 역함수 $y = f^{-1}(x)$ 의 그래프가 서로 다른 두 점에서 만날 때, 상수 k 의 값의 범위는?

① $0 < k < \frac{25}{4}$　② $k < \frac{25}{4}$　③ $6 \leq k \leq \frac{25}{4}$
④ $6 < k \leq \frac{25}{4}$　⑤ $6 \leq k < \frac{25}{4}$

해설



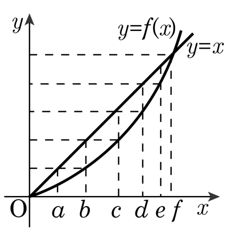
주어진 함수 $y = f(x)$ 의 그래프와 그 역함수 $y = f^{-1}(x)$ 의 그래프는 직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이므로 두 함수의 그래프의 교점은 $y = x$ 위에 있다.
따라서, 조건을 만족하려면 $f(x) = x^2 - 4x + k = (x-2)^2 + k - 4(x \geq 2)$ 의 그래프와 직선 $y = x$가 서로 다른 두 점에서 만나야 한다.

(i) $y = f(x)$ 의 그래프와 직선 $y = x$가 접할 때,
$x^2 - 4x + k = x,\ x^2 - 5x + k = 0$
이 이차방정식의 판별식을 D라 하면
$D = 5^2 - 4k = 0$
$\therefore \mathrm{k} = \frac{25}{4}$

(ii) $y = f(x)$ 의 그래프가 점 $(2,\ 2)$를 지날 때
$2^2 - 4 \cdot 2 + k = 2$ 이므로 $k = 6$

(i), (ii) 에서 $6 \leq k < \frac{25}{4}$

40. 다음 그림에서 곡선은 함수 $y = f(x)$의 그래프이고 직선은 $y = x$의 그래프이다. $(f \circ f)(d) + (g \circ g)(c)$를 구하면? (단, $g(x) = f^{-1}(x)$이다.)



① $2a$　　② $b + e$　　③ $c + d$

④ $2c$　　⑤ $b + c$

해설

$(f \circ f)(d) = b,\ (g \circ g)(c) = e$

f와 g는 역함수 관계. 즉 $y = x$에 대칭이다.

41. 두 함수 $y = |x+1| - |x-2|$, $y = mx$ 의 그래프가 서로 다른 세 점에서 만나도록 상수 m의 값을 정할 때, 다음 중 m의 값이 될 수 있는 것을 구하면?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ $\frac{3}{2}$

해설

$y = |x+1| - |x-2|$ 에서

i) $x < -1$ 일 때

$y = -(x+1) - (-x+2) = -3$

ii) $-1 \le x < 2$ 일 때

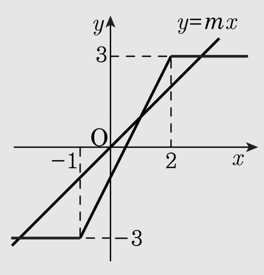
$y = (x+1) - (-x+2) = 2x - 1$

iii) $x \ge 2$ 일 때

$y = (x+1) - (x-2) = 3$

i) ii) iii) 에서 $y = mx$ 와 서로 다른 세 점에서 만나기 위해서는 $0 < m < \frac{3}{2}$

따라서 m 의 값이 될 수 있는 것은 ④ 번이다.



42. 분수식 $\frac{4x}{x-1}+\frac{x^2}{x+1}+\frac{x^2}{x^2-1}$ 를 간단히 한 것은?

① $\frac{(x+2)^2}{x^2-1}$ ② $\frac{(x-2)^2}{x^2+1}$ ③ $\frac{x(x+2)^2}{x^2+1}$
④ $\frac{x(x-2)^2}{x^2+1}$ ⑤ $\frac{x(x+2)^2}{x^2-1}$

해설

$$\frac{4x}{x-1}+\frac{x^2}{x+1}+\frac{x^2}{x^2-1}$$
$$=\frac{4x^2+4x+x^3-x^2+x^2}{x^2-1}$$
$$=\frac{x^3+4x^2+4x}{x^2-1}$$
$$=\frac{x(x^2+4x+4)}{x^2-1}$$
$$=\frac{x(x+2)^2}{x^2-1}$$

43. $ab>0$이고 $\frac{1}{a}-\frac{1}{b}=\frac{1}{a+b}$일 때, $\frac{b}{a}+\frac{a}{b}$의 값을 구하면?

① $\sqrt{5}$ ② $2\sqrt{5}$ ③ $3\sqrt{5}$ ④ $4\sqrt{5}$ ⑤ $5\sqrt{5}$

해설

$b(a+b)-a(a+b)=ab$에서 $a^2+ab-b^2=0$

$\left(\frac{a}{b}\right)^2+\left(\frac{a}{b}\right)-1=0$에서 $\frac{a}{b}=t$라 하면

$t>0$ ($\because$ $ab>0$)

$\therefore$ $t^2+t-1=0$에서 $t=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$

$\therefore$ $t+\frac{1}{t}=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}+\frac{2}{\sqrt{5}-1}=\sqrt{5}$

44. 함수 $f_1(x) = \dfrac{2x+3}{-x-1}$ 에 대하여 $f_{n+1} = f_1 \circ f_n (n = 1, 2, 3, \cdots)$ 이라 할 때, $f_{100}(1)$ 의 값은?

① -1　　② $-\dfrac{5}{2}$　　③ $-\dfrac{4}{3}$　　④ 1　　⑤ 2

해설

$f_1(x) = \dfrac{2x+3}{-x-1}$ 에서 $f_1(1) = -\dfrac{5}{2}$

$f_2(1) = (f_1 \circ f_1)(1) = f_1\left(-\dfrac{5}{2}\right)$

$= \dfrac{-\dfrac{10}{2}+3}{\dfrac{5}{2}-1} = -\dfrac{4}{3}$

$f_3(1) = (f_1 \circ f_2)(1) = f_1\left(-\dfrac{4}{3}\right) = \dfrac{-\dfrac{8}{3}+3}{\dfrac{4}{3}-1} = 1$

$f_4(1) = (f_1 \circ f_3)(1) = f_1(1) = -\dfrac{5}{2}$

$\therefore f_4 = f_1,\ f_5 = f_2,\ f_6 = f_3, \cdots$

$\therefore f_{3n+1} = f_1,\ f_{3n+2} = f_2,\ f_{3n} = f_3$

$100 = 3 \times 33 + 1$ 이므로

$\therefore\ f_{100}(1) = f_1(1) = -\dfrac{5}{2}$

45. 함수 $f(x) = \dfrac{x+2}{x-1}$ 의 역함수를 $g(x)$ 라 한다. $y = g(x)$ 와 $y = x$ 의 그래프가 만나는 점을 A, B 라 할 때 선분 AB 의 길이는?

① $\sqrt{6}$　② $2\sqrt{6}$　③ $4\sqrt{2}$　④ $3\sqrt{3}$　⑤ $6\sqrt{3}$

해설

$y = f(x)$ 와 $y = g(x)$ 는 $y = x$ 에 대해 대칭이므로 $\begin{cases} y = g(x) \\ y = x \end{cases}$

의 교점은 $\begin{cases} y = f(x) \\ y = x \end{cases}$ 의 교점과 같다.

$\dfrac{x+2}{x-1} = x,\ x + 2 = x^2 - x$

$x^2 - 2x - 2 = 0,\ x = 1 \pm \sqrt{3}$ 이므로

$\mathrm{A}(1+\sqrt{3},\ 1+\sqrt{3}),\ \mathrm{B}(1-\sqrt{3}, 1-\sqrt{3})$

$\therefore\ \overline{\mathrm{AB}} = \sqrt{(2\sqrt{3})^2 + (2\sqrt{3})^2} = 2\sqrt{6}$

46. 두 함수 f, g 가 $f(x)=\dfrac{1}{x+1}$, $g(x)=\sqrt{x}+1$ 일 때, $0\le x\le 4$ 에서 함수 $y=(f\circ g)(x)$ 의 최댓값과 최솟값의 합을 구하면?

① $\dfrac{1}{4}$ ② $\dfrac{1}{2}$ ③ $\dfrac{3}{4}$ ④ 1 ⑤ $\dfrac{5}{4}$

해설

$$\begin{aligned}(f\circ g)(x)&=f(g(x))=f(\sqrt{x}+1)\\&=\frac{1}{\sqrt{x}+1+1}\\&=\frac{1}{\sqrt{x}+2}\end{aligned}$$

$\sqrt{x}=t$ 로 놓으면

$0\le x\le 4$ 에서 $0\le t\le 2$ 이므로

주어진 함수는 $y=\dfrac{1}{t+2}(0\le t\le 2)$

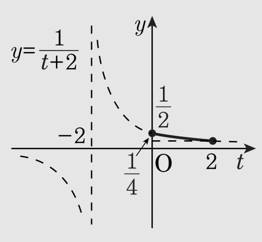
따라서 다음 그림에서 $t=0$ 일 때

최댓값은 $\dfrac{1}{2}$,

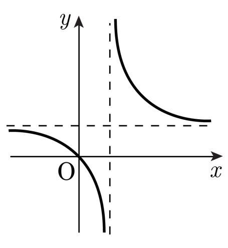
$t=2$ 일 때

최솟값은 $\dfrac{1}{4}$ 이므로

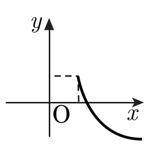
구하는 합은 $\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}=\dfrac{3}{4}$



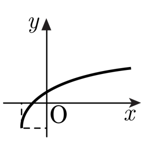
47. 다음 그림은 분수함수 $y = \dfrac{b}{x+a} + c$ 의 그래프의 개형이다. 다음 중 무리함수 $y = a - \sqrt{bx+c}$ 의 그래프의 개형으로 옳은 것은?



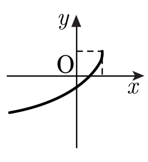
①



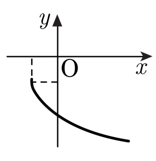
②



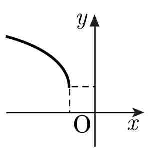
③



④



⑤



해설

점근선이 $x =$ 양수, $y =$ 양수 이므로

$y = \dfrac{b}{x+a} + c$에서 $a < 0,\ c > 0$

그리고 원점을 지나므로

$\dfrac{b}{a} + c = 0,\ b = -ac > 0$

$\therefore\ y = -\sqrt{bx+c} + a$

꼭짓점 $\left(-\dfrac{c}{b},\ a\right),\ \left(-\dfrac{c}{b} < 0, a < 0\right)$

루트 앞의 부호가 음수이므로 그래프의 개형은 ④이다.

48. 삼차함수 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ 에 대하여 $g(x)=(x+1)f(x)-24x$ 로 정의 한다.
$g(0)=g(1)=g(2)=g(3)=0$ 일 때, $f(4)$ 의 값은 ?

① 20 ② 22 ③ 24 ④ 26 ⑤ 28

해설

$g(0)=g(1)=g(2)=g(3)=0$ 이므로
$g(x)=x(x-1)(x-2)(x-3)$ 이 된다.
즉, $(x+1)f(x)-24x=x(x-1)(x-2)(x-3)$
이 식에 $x=4$ 를 대입하면
$5f(4)-24\cdot 4=4\cdot 3\cdot 2\cdot 1$
$\therefore f(4)=24$

49. 대학 입학시험에서 수험자의 남녀비는 $5:3$, 합격자의 남녀비는 $4:3$, 불합격자의 남녀비는 $2:1$이다. 남자의 합격률을 a, 여자의 합격률을 b, 전체의 합격률을 c라 할 때, abc의 값을 구하면?

① $\frac{1}{30}$ ② $\frac{4}{45}$ ③ $\frac{5}{62}$ ④ $\frac{6}{73}$ ⑤ $\frac{7}{80}$

해설

	수험자	합격자	불합격자
남	$5k$	$4l$	$2m$
여	$3k$	$3l$	m

$5k = 4l + 2m \cdots$ ㉠

$3k = 3l + m \cdots$ ㉡

㉡ $\times 2 -$ ㉠에서 $k = 2l$ $\quad \therefore \frac{l}{k} = \frac{1}{2}$

남자합격률 $= \frac{4l}{5k} = \frac{4}{5} \times \frac{1}{2} = \frac{2}{5}$

여자합격률 $= \frac{3l}{3k} = \frac{l}{k} = \frac{1}{2}$

전체합격률 $= \frac{4l+3l}{5k+3k} = \frac{7l}{8k} = \frac{7}{16}$

$\therefore abc = \frac{2}{5} \times \frac{1}{2} \times \frac{7}{16} = \frac{7}{80}$

50. $\sqrt[3]{5+2\sqrt{13}}+\sqrt[3]{5-2\sqrt{13}}$ 의 값을 구하면?

① $\frac{3}{2}$　② $\frac{{}^{3}\sqrt{65}}{4}$　③ $\frac{1+{}^{6}\sqrt{13}}{2}$

④ ${}^{3}\sqrt{2}$　⑤ 1

해설

$a=\sqrt[3]{5+2\sqrt{13}},\ b=\sqrt[3]{5-2\sqrt{13}}$ 이라고 하면

$a^3+b^3=10,\ ab=-3,$

$a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b),$

$a+b=x$ 라고 하면,

$x^3+9x-10=0,$

$(x-1)(x^2+x+10)=0$

$\therefore\ x=1$