1. 이차부등식 $ax^2+bx+c>0$ 의 해가 $\frac{1}{14}<x<\frac{1}{10}$ 일 때, 이차부등식 $4cx^2-2bx+a<0$ 의 해는?

① $x<-7$ 또는 $x>-5$ ② $-7<x<-5$
③ $-7<x<5$ ④ $5<x<7$
⑤ $x<5$ 또는 $x>7$

해설

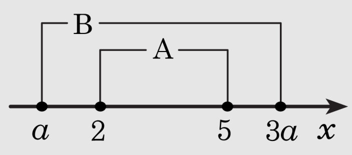
$ax^2+bx+c>0$ 의 해가 $\frac{1}{14}<x<\frac{1}{10}$ 이므로
$(14x-1)(10x-1)<0,\ 140x^2-24x+1<0$
$-140x^2+24x-1>0 \Leftrightarrow ax^2+bx+c>0$
$\therefore a=-140, b=24, c=-1 \cdots$ (가)
(가)를 $4cx^2-2bx+a<0$ 에 대입하면
$-4x^2-48x-140<0$
$x^2+12x+35>0,\ (x+7)(x+5)>0$
$\therefore x<-7$ 또는 $x>-5$

2. 양의 실수 a에 대하여 $-x^2+7x-10 \geq 0$의 모든 해가 $x^2-4ax+3a^2 \leq 0$을 만족할 때, a의 값의 범위는?

① $\frac{1}{3} \leq a \leq 2$ ② $\frac{2}{3} \leq a \leq 2$ ③ $\frac{5}{3} \leq a \leq 2$
④ $\frac{5}{3} \leq a \leq 5$ ⑤ $2 \leq a \leq 5$

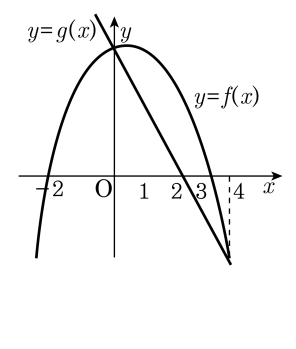
해설

$-x^2+7x-10 \geq 0$
$x^2-7x+10 \leq 0$
$(x-2)(x-5) \leq 0$
$2 \leq x \leq 5$
$x^2-4ax+3a^2 \leq 0$
$(x-a)(x-3a) \leq 0$
$a \leq x \leq 3a (\because a > 0)$
㉠의 모든 해가 ㉡에 포함되므로



따라서 $a \leq 2,\ 3a \geq 5$이므로 $\frac{5}{3} \leq a \leq 2$

3. 이차함수 $y = f(x)$ 의 그래프와 직선 $y = g(x)$ 가 다음 그림과 같을 때, 부등식 $f(x) > g(x)$ 의 해를 구하면?



① $-2 < x < 4$ ② $-2 < x < 3$

③ $0 < x < 4$ ④ $2 < x < 3$

⑤ $3 < x < 4$

해설

부등식 $f(x) > g(x)$ 의 해는
함수 $f(x)$ 의 그래프가 직선 $y = g(x)$ 보다
위쪽에 있는 x 의 구간을 의미하므로
구하는 해는 $0 < x < 4$

4. 실수 x에 대하여 $[x]$는 x를 넘지않는 최대 정수를 나타낸다고 한다. 부등식 $2[x]^2-[x]-6<0$를 만족하는 x의 범위를 바르게 구한 것은?

① $-1 \le x < 2$　② $x \le -1$　③ $x \ge 1$

④ $x \le 1$　⑤ $x \le -1,\ x \ge 2$

해설

$2[x]^2-[x]-6<0$에서 좌변을 인수분해하면

$(2[x]+3)([x]-2)<0,\ -\dfrac{3}{2}<[x]<2$

이 때 $[x]$는 정수이므로 $[x]=-1,\ 0,\ 1$

$[x]=-1,\ 0,\ 1$이면 $-1 \le x < 2$

$\therefore\ -1 \le x < 2$

5. 이차부등식 $(x+1)^2 \le k(x^2-x+1)$ 이 모든 실수 x에 대하여 항상 성립할 때, 실수 k의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

$(x+1)^2 \le k(x^2-x+1)$
$(k-1)x^2-(k+2)x+k-1 \ge 0$
모든 x에 대해 성립하려면,
$k-1>0$, 판별식이 0보다 작거나 같다
$D=(k+2)^2-4(k-1)(k-1) \le 0$에서
$\{(k+2)-2(k-1)\}\{(k+2)+2(k-1)\}$
$=(-k+4)k \le 0$
$\therefore\ k(k-4) \ge 0, \quad k \le 0$ 또는 $k \ge 4$
$\therefore\ \ k \ge 4(\because k>1) \quad \therefore$ 최솟값 : 4

6. 모든 실수 x에 대하여 x^2+px+p가 -3보다 항상 크기 위한 정수 p의 최댓값을 구하면?

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

$x^2+px+p>-3$
$x^2+px+(p+3)>0$
$D=p^2-4(p+3)=p^2-4p-12<0$
$(p-6)(p+2)<0$
$-2<p<6$
$\therefore$ 최대정수 : 5

7. 임의의 실수 x에 대하여 $x^2+2ax+2a+3 \geq 0$이 성립하기 위한 상수 a의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

$x^2+2ax+2a+3 \geq 0$이 항상 성립할 조건은

$D/4 = a^2-2a-3 = (a+1)(a-3) \leq 0$

$\therefore -1 \leq a \leq 3$

a의 최솟값은 -1

8. 모든 실수 x에 대하여 이차부등식 $x^2+2kx-k+6>0$이 항상 성립하도록 k의 범위를 구하면 $m<k<n$이다. 이 때, m^2+n^2의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 13

해설

$x^2+2kx-k+6>0$이 항상 성립하려면
판별식 $D<0$이다.
$\frac{D}{4}=k^2-(-k+6)<0$
$k^2+k-6<0$, $(k+3)(k-2)<0$
$-3<k<2$
$\therefore m=-3$, $n=2$
$\therefore\ m^2+n^2=(-3)^2+2^2=13$

9. 모든 실수 x 에 대하여 다항식 $(m+1)x^2-2(m-1)x+3$ 의 값이 항상 2보다 크도록 하는 상수 m 의 범위가 $a<m<b$ 일 때, $a+b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$(m+1)x^2-2(m-1)x+3>2$

$(m+1)x^2-2(m-1)x+1>0$ 이므로

$m \neq -1,\ m>-1$ 이고, $D<0$ 이다.

$\frac{D}{4}=m^2-3m<0 \quad \therefore\ 0<m<3$

$\therefore a=0,\ b=3$

$\therefore a+b=3$

10. 이차부등식 $ax^2 - bx + c < 0$의 해가 $x < -1$ 또는 $x > 3$일 때, 이차부등식 $ax^2 + cx + b > 0$의 해는?

① $-2 < x < 1$　② $-1 < x < 0$　③ $1 < x < 2$
④ $1 < x < 3$　⑤ $2 < x < 5$

해설

$x < -1$ 또는 $x > 3$인 해를 갖는 이차항계수가
1인 이차부등식은 $(x+1)(x-3) > 0$이므로,
$ax^2 - bx + x < 0$의 a가 음수이고,
이 부등식은 $a(x+1)(x-3) < 0$과 같다.
따라서 $b = 2a,\ c = -3a$이고 주어진 부등식
$ax^2 - 3ax + 2a = a(x^2 - 3x + 2)$
$= a(x-2)(x-1) > 0$이 된다.
$a < 0$이므로 만족하는 해는 $(x-1)(x-2) < 0$에서
$1 < x < 2$

11. x 에 대한 이차부등식 $x^2+ax+b>0$ 의 해가 $x<1$ 또는 $x>4$ 일 때 상수 $a+b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

$x^2+ax+b>0$ 의 해가 $x<1$ 또는 $x>4$ 이려면
$(x-1)(x-4)>0$ 에서 $x^2-5x+4>0$ 이므로
$a=-5$, $b=4$ 따라서 $a+b=-1$

12. 이차방정식 $f(x)=0$의 두 근을 α, β라 할 때, $\alpha+\beta=4$이다. 방정식 $f(4x-2)=0$의 두 근의 합은?

① 2　② -2　③ 4　④ -4　⑤ 0

해설

$f(x)=0 \iff x=\alpha$ 또는 $x=\beta$가 성립하면

$f(4x-2)=0 \iff 4x-2=\alpha$ 또는 $4x-2=\beta$

$\iff x=\dfrac{\alpha+2}{4}$ 또는 $x=\dfrac{\beta+2}{4}$

즉 $f(4x-2)=0$의 두 근은 $\dfrac{\alpha+2}{4}$, $\dfrac{\beta+2}{4}$이다.

$\therefore \dfrac{\alpha+2}{4}+\dfrac{\beta+2}{4}=\dfrac{\alpha+\beta+4}{4}=\dfrac{8}{4}=2$

13. x의 이차방정식 $mx^2 + 2(1-2m)x + m = 0$이 서로 다른 두 실근을 가질 m의 범위를 구하면?

① $0 < m < \frac{1}{3}$　　② $m < \frac{1}{3},\ m > 1$

③ $m < 0,\ 0 < m < \frac{1}{3},\ m > 1$　　④ $m < 0\ ,\ m > 1$

⑤ $\frac{1}{3} < m < 1$

해설

이차방정식이므로 $m \neq 0$ $\cdots$ ㉠

$\frac{D}{4} = (1-2m)^2 - m^2 > 0$에서

$(m-1)(3m-1) > 0,\ m < \frac{1}{3},\ m > 1$ $\cdots$ ㉡

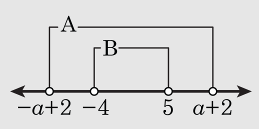
㉠, ㉡에서 $m < 0,\ 0 < m < \frac{1}{3},\ m > 1$

14. 양의 실수 a에 대하여 부등식 $-3 < x+1 < 6$의 모든 해가 부등식 $|x-2| < a$를 만족할 때, a값의 범위는?

① $0 < a \leq 3$　② $0 < a < 3$　③ $0 \leq a \leq 3$
④ $a \geq 3$　⑤ $a \geq 6$

해설

$\therefore\ a \geq 6$



15. $1 \leq x \leq 2$ 인 모든 실수 x에 대하여 부등식 $ax < 4 + x - x^2$ 이 항상 성립할 때, 실수 a의 값의 범위를 구하면?

① $a < 1$　② $a < 2$　③ $a < 3$　④ $a < 4$　⑤ $a < 5$

해설

부등식 $ax < 4 + x - x^2$ 에서 $x^2 + (a-1)x - 4 < 0$
$1 \leq x \leq 2$ 에서
이 부등식이 항상 성립해야 하므로
방정식 $x^2 + (a-1)x - 4 = 0$ 의 한 근이1 보다 작고, 다른 한 근은 2 보다 커야 한다.
$f(x) = x^2 + (a-1)x - 4$ 로 놓으면
$f(1) = 1 + (a-1) - 4 < 0$ 에서 $a < 4 \cdots$ ㉠
$f(2) = 4 + 2(a-1) - 4 < 0$ 에서 $a < 1 \cdots$ ㉡
㉠, ㉡에서 $a < 1$

16. 이차방정식 $2x^2 + 2kx + k + 2 = 0$은 서로 다른 두 실근을 갖고, 이차부등식 $x^2 - kx + k + 3 \geq 0$가 절대부등식이 되기 위한 실수 k값의 범위를 구하면?

① $1 - \sqrt{5} < k < 1 + \sqrt{5}$

② $1 - \sqrt{5} \leq k \leq 1 + \sqrt{5}$

③ $-2 < k < 1 - \sqrt{5}$ 또는 $1 + \sqrt{5} < k < 6$

④ $-2 \leq k < 1 - \sqrt{5}$ 또는 $1 + \sqrt{5} < k \leq 6$

⑤ $-2 < k \leq 1 - \sqrt{5}$ 또는 $1 + \sqrt{5} \leq k < 6$

해설

i) 서로 다른 두 실근을 가지려면,
$D' = k^2 - (2k+4) > 0$이므로
$k^2 - 2k - 4 > 0$
$k < 1 - \sqrt{5}$ 또는 $k > 1 + \sqrt{5}$ $\cdots$ ①
ii) $x^2 - kx + k + 3 \geq 0$이 절대부등식이 되려면
$D = k^2 - 4(k+3) \leq 0$이므로 $(k+2)(k-6) \leq 0$
$-2 \leq k \leq 6$ $\cdots$ ②
①, ②의 공통범위는
$-2 \leq k < 1 - \sqrt{5}$ 또는 $1 + \sqrt{5} < k \leq 6$

17. 좌표평면 위에서 모든 실수 x 에 대하여 직선 $y = 2(kx+1)$ 이 곡선 $y = -(x-2)^2 + 1$ 보다 항상 위쪽에 있도록 실수 k 의 값을 정할 때, 다음 중 k 의 값의 범위에 속하지 <u>않는</u> 것은?

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 0　　⑤ −1

해설

임의의 실수 x 에 대하여
부등식 $2(kx+1) > -(x-2)^2 + 1 \cdots$ ㉠
이 항상 성립하도록 k 의 값을 정하면 된다.
㉠식을 정리하면
$x^2 + 2(k-2)x + 5 > 0$
㉡식이 항상 성립하기 위하여
$\frac{D}{4} = (k-2)^2 - 5 < 0$
$\Rightarrow\ k^2 - 4k - 1 < 0$
$\therefore\ 2 - \sqrt{5} < k < 2 + \sqrt{5}$
이 때, 0, 1, 2, 3 은 k 의 값의 범위에 속하나
−1 은 속하지 않는다.

18. 연립부등식 $\begin{cases} x^3-2x^2+x-2\ge 0 \\ x^2-x-6<0 \end{cases}$ 의 해는?

① $-2\le x<3$ ② $-2<x<3$ ③ $2\le x<3$
④ $2<x\le 3$ ⑤ $2\le x\le 3$

해설

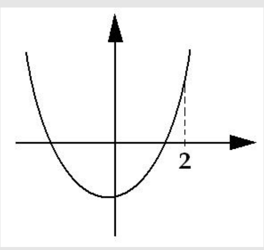
$x^2-2x+x-2\ge 0$ 에서
$x^2(x-2)+(x-2)\ge 0$
$\therefore (x-2)(x^2+1)\ge 0$
$x^2+1>0$ 이므로 $x-2\ge 0$
$\therefore x\ge 2\cdots$ ㈎
$x^2-x-6<0$ 에서 $(x-3)(x+2)<0$
$\therefore -2<x<3\cdots$ ㈏
따라서 ㈎, ㈏의 공통 범위를 구하면
$2\le x<3$ 이다.

19. $x > 2$인 모든 실수 x에 대하여 $x^2 - 2kx + k - 1 > 0$을 성립하게 하는 실수 k의 최댓값은?

① -1　　② 0　　③ 1　　④ 2　　⑤ 3

해설

$D/4 = k^2 - k + 1 > 0$이므로 서로 다른 두 실근을 가진다.



문제의 조건을 만족하기 위해서는 대칭축이 2보다 왼쪽에 있어야 하고 $f(2) \geq 0$의 두 조건을 모두 만족해야 한다.

대칭축 조건에서 $k < 2$ ⋯⋯ ㉠

$f(2) = 3 - 3k \geq 0$에서 $k \leq 1$ ⋯⋯ ㉡

㉠, ㉡에서 $k \leq 1$

k의 최댓값은 1이다.

20. 부등식 $5-x>2|x+1|$의 해와 $ax^2+bx+7>0$의 해가 같도록 상수 a, b의 값을 정할 때, $a+b$의 값은 ?

① -7　　② -5　　③ 5　　④ 7　　⑤ 0

해설

$5-x>2|x+1|$ 을 풀면

(ⅰ) $x \ge -1$ 일 때

$5-x>2x+2$, $x<1$　$\therefore -1 \le x < 1$

(ⅱ) $x<-1$ 일 때

$5-x>-2x-2$, $x>-7$　$\therefore -7<x<-1$

(ⅰ), (ⅱ) 에 따라 $-7<x<1$

$ax^2+bx+7>0 \Leftrightarrow -7<x<1$ 이므로 $a<0$ 이고

$ax^2+bx+7=a(x+7)(x-1)$

계수를 비교하면

$a=-1, b=-6$　$\therefore\ a+b=-7$

21. 이차부등식 $x^2 + ax + b < 0$ 을 풀 때, 근우는 b 를 잘못보고 풀어서 $1 < x < 3$ 이라는 해를 얻었고, 기원이는 a 를 잘못보고 풀어서 $-2 < x < 4$ 이라는 해를 얻었다. 이 부등식의 옳은 해는?

① $-1 < x < 2$　　② $-2 < x < 3$

③ $2 - 2\sqrt{5} < x < 2 + 2\sqrt{5}$　　④ $1 - \sqrt{3} < x < 1 + \sqrt{3}$

⑤ $2 - 2\sqrt{3} < x < 2 + 2\sqrt{3}$

해설

$1 < x < 3 \Leftrightarrow (x-1)(x-3) < 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 < 0$

$\therefore a = -4$

$-2 < x < 4 \Leftrightarrow (x+2)(x-4) < 0$

$\Leftrightarrow x^2 - 2x - 8 < 0$

$\therefore b = -8$

$x^2 - 4x - 8 < 0$

$\therefore 2 - 2\sqrt{3} < x < 2 + 2\sqrt{3}$