

1. 자연수 전체의 집합 N 에서 N 으로의 함수에 대하여 $f(x) = (x \text{를 } 3 \text{으로 나눈 나머지})$ 로 정의할 때, 다음 보기 중 옳은 것을 골라라.

보기

- ㉠ $f(10) = 1$
㉡ $f(x) = 2$ 를 만족하는 두 자리 자연수 x 의 개수는 29개이다.
㉢ 임의의 자연수에 대하여 $f(x) = f(x^2)$ 이다.

▶ 답 :

▶ 정답 : ㉠

해설

㉠ $10 = 3 \times 3 + 1$ 즉 나머지 1
 $\therefore f(10) = 1$
㉡ $f(x) = 2$ 를 만족하는 자연수는 x 를 3으로 나누면 나머지가 2 이므로 $x = 3n + 2$ (n 은 음이 아닌 정수)이고 두 자리수이므로
 $10 \leq 3n + 2 \leq 99$, 즉 $8 \leq 3n \leq 97$, $\frac{8}{3} \leq n \leq \frac{97}{3}$
 $\therefore n = 3, 4, 5, 6 \dots, 32$ 이므로 30개이다.
㉢ $x = 2$ 일 때, $f(2) = 2$ 이고 $f(2^2) = f(3 \times 1 + 1) = 1$ 이므로 $f(x) \neq f(x^2)$ 이다.
따라서, 옳은 것은 ㉠뿐이다.

2. 자연수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)$ 가 다음 두 조건을 만족시킬 때, $f(1280)$ 의 값은 얼마인가?

(i) $f(2x) = f(x) \ (x = 1, 2, 3, \dots)$
(ii) $f(2x + 1) = 2^x \ (x = 0, 1, 2, 3, \dots)$

- ① 2 ② 4 ③ 8 ④ 16 ⑤ 32

해설

$1280 = 2^8 \cdot 5$ 이므로,
 $f(2^8 \cdot 5) = f(2^7 \cdot 5) = f(2^6 \cdot 5) = \dots = f(5)$
 $= f(2 \cdot 2 + 1)$ 이므로,
 $f(2 \cdot 2 + 1) = 2^2 = 4$

3. 실수 전체의 집합 R 에서 R 로의 함수 $f(x) = a|x-1| + (2-a)x + a$ 가 일대일대응이 되기 위한 실수 a 의 값의 범위는?

① $a < -1$

② $-1 < a < 1$

③ $0 < a < 1$

④ $a < 1$

⑤ $a < -1, a > 1$

해설

$f(x)$ 가 일대일대응이 되기 위해서는
 $x \geq 1$ 에서 $f(x)$ 가 증가함수이므로
 $x < 1$ 에서도 $f(x)$ 는 증가함수이어야 한다.
 $\therefore -2(a-1) > 0$
 $\therefore a < 1$

4. 집합 $U = \{1, 2, 3, 4\}$ 의 부분집합 X, Y 가 $X \cup Y = U$, $X \cap Y = \emptyset$ 을 만족한다고 한다. 이 때, X 에서 Y 로의 일대일 대응이 되는 함수 f 의 개수를 구하면?

▶ 답: 개

▶ 정답 : 12개

해설

$U = \{1, 2, 3, 4\}$ 에서 $X, Y \subset U$, $X \cup Y = U$,
 $X \cap Y = \emptyset$ 이다.

$f : X \rightarrow Y$ 이 일대일 대응이 되려면

$$n(X) = n(Y)$$

$$n(X \cup Y) = n(U) = 4, X \cup Y = \emptyset \text{ 이므로}$$

$$n(X \cup Y) = n(U) = 4,$$

$$n(X) + n(Y) = 4 \text{ 이다.}$$

$$n(X) + n(Y) = 4 \quad \text{or} \quad n(X) = n(Y) = 2$$

$\therefore n(X) = n(Y) = 2$
 $X = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}\}$ 의 6 가지 경우가 생기며

기며
 y 에서 y 크기의 대응변수의 각각의 크기씩 빼기므로

X 에서 Y 로의

5. 두 집합 $A = \{-1, 0, 1\}$, $B = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ 에서 A 의 모든 원소 x 에 대하여 $f(x) = f(x^2)$ 으로 되는 A 에서 B 로의 함수 f 의 개수는?

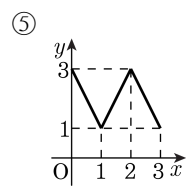
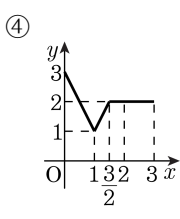
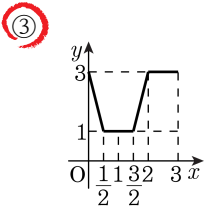
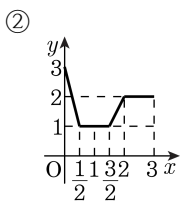
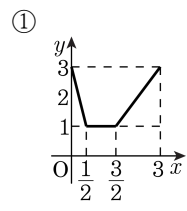
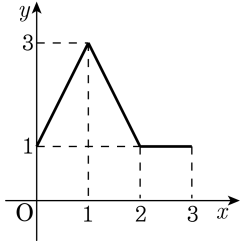
① 12 개 ② 20 개 ③ 25 개 ④ 27 개 ⑤ 30 개

해설

$f(-1) = f(1), f(0) = f(0)$ 이므로
 A 의 원소 1 이 대응하는 방법의 수는 5 가지
 A 의 원소 0 이 대응하는 방법의 수는 5 가지
 $\therefore 5 \times 5 = 25$ (가지)

6. 함수

$y = f(x) \ (0 \leq x \leq 3)$ 의 그래프가 그림과 같을 때, 합성함수 $y = (f \circ f)(x) \ (0 \leq x \leq 3)$ 의 그래프는 무엇인가?



해설

$0 \leq x \leq 2$ 에서 $y = f(x)$ 의 그래프가
 $x = 1$ 에 대하여 대칭이므로
 $y = (f \circ f)(x)$ 의 그래프도
 $0 \leq x \leq 2$ 에서 $x = 1$ 에 대하여 대칭이다.
 $y = (f \circ f)(x) = f(f(x))$ 에서
 $f(f(0)) = f(1) = 3$
 $f(f(1)) = f(3) = 1$
 $f(f(2)) = f(1) = 3$
 $f(f(3)) = f(1) = 3$
따라서, $y = (f \circ f)(x)$ 를
그래프로 나타내면 ③과 같다.

7. 실수 전체의 집합 R 에서 R 로의 함수 f 를 $f: x \rightarrow a|x-1| + (2-a)x + a$ 와 같이 정의한다. 함수 f 의 역함수가 존재할 때, 상수 a 의 값의 범위를 구하면?

- ① $a < 1$ ② $a > 1$ ③ $0 < a < 2$
④ $-\frac{1}{2} < a < 2$ ⑤ $0 < a < \frac{2}{3}$

해설

역함수가 존재하려면 일대일대응이어야 한다.

$$f(x) = a|x-1| + (2-a)x + a$$

$$= \begin{cases} 2x & (x \geq 1) \\ (2-2a)x + 2a & (x < 1) \end{cases}$$

가 일대일대응으려면 $x \geq 1$ 에서 증가함수이므로 $x < 1$ 에서도 증가함수 이어야 한다.

즉, $2-2a > 0$ 에서 $a < 1$

8. 함수 $f(x)$ 가 $f\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = 2x(x \neq 1)$ 를 만족할 때 $f(x)$ 의 역함수 $f^{-1}(x)$ 의 식은?

- ① $\frac{x+2}{x-2}(x \neq 2)$ ② $\frac{x+1}{x-2}(x \neq 2)$ ③ $\frac{x-1}{x-2}(x \neq -1)$
④ $\frac{x+2}{x+1}(x \neq -1)$ ⑤ $\frac{x+2}{x-1}(x \neq 1)$

해설

$$f\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = 2x \text{ 에서}$$

$$\frac{x+1}{x-1} = t \text{ 로 놓으면 } x = \frac{t+1}{t-1}$$

$$\therefore f(t) = \frac{2(t+1)}{t-1}, f(x) = \frac{2(x+1)}{x-1}$$

$$y = \frac{2(x+1)}{x-1} \text{ 이면}$$

$$yx - y = 2x + 2 \text{ 에서 } x = \frac{y+2}{y-2}$$

$$\therefore f^{-1}(x) = \frac{x+2}{x-2} (x \neq 2)$$

9. 세 함수 f, g, h 에 대하여 $f(x) = x + 4$, $g(x) = -2x + 3$ 이고 $(f^{-1} \circ g^{-1} \circ h)(x) = f(x)$ 가 성립할 때, $h^{-1}(5)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -9

해설

두 함수 $f(x) = x + 4$, $g(x) = -2x + 3$ 에 대하여

$f^{-1} \circ g^{-1} \circ h = f$ 이므로

$g^{-1} \circ h = f \circ f$, $h = g \circ f \circ f$

$\therefore h(x) = g(f(f(x)))$

$= g(f(x + 4))$

$= g((x + 4) + 4)$

$= g(x + 8)$

$= -2(x + 8) + 3 = -2x - 13$

$h^{-1}(5) = a$ 라고 하면 $h(a) = 5$

$-2a - 13 = 5$, $-2a = 18$

$\therefore a = -9$

$\therefore h^{-1}(5) = -9$

10. 함수 $f(x)$ 는 모든 함수 $h(x)$ 에 대하여 $(h \circ f \circ g)(x) = h(x)$ 를 만족시키고, $g(x) = 3x + 1$ 일 때, $f(7)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$(h \circ f \circ g)(x) = h(x)$ 에서

$h((f \circ g)(x)) = h(x)$ 이므로

$(f \circ g)(x) = x \Rightarrow f(g(x)) = x$

$f(3x + 1) = x$

$3x + 1 = t$ 로 두면 $x = \frac{1}{3}t - \frac{1}{3}$ 이고

$f(t) = \frac{1}{3}t - \frac{1}{3}$

$\therefore f(7) = \frac{7}{3} - \frac{1}{3} = 2$

11. $\begin{cases} 2x+1 & (x \geq 1) \\ x+2 & (x < 1) \end{cases}$ 에 대하여 $f^{-1}(5) + f^{-1}(k) = -2$ 일 때, k 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $k = -2$

해설

$$f(x) = \begin{cases} 2x+1 & (x \geq 1) \\ x+2 & (x < 1) \end{cases} \text{ 에서}$$

$x \geq 1$ 일 때, $f(x) \geq 3$ 이며

$x < 1$ 일 때, $f(x) < 3$ 이다.

이 때, $f^{-1}(5) + f^{-1}(k) = -2$ 에서

$f^{-1}(5) = a$ 라고 놓으면

$$f(a) = 5 \geq 3 \text{ 이므로 } f(a) = 2a + 1 = 5$$

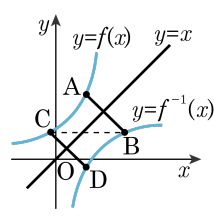
$$\therefore a = 2$$

$$\text{그러므로 } f^{-1}(k) = -4$$

$$f(-4) = -4 + 2 = k \text{ } (\because -4 < 3)$$

$$\therefore k = -2$$

12. 다음 그림은 함수 $y = f(x)$ 와 그 역함수 $y = f^{-1}(x)$ 의 그래프이다. 점 A의 x 좌표가 a 일 때, 점 D의 y 좌표는?(단, 점선은 x 축에 평행하다.)



- ① $-f^{-1}(a)$ ② $-f(a)$
 ③ a ④ $f^{-1}(a)$
 ⑤ $f^{-1}(f^{-1}(a))$

해설

A $(a, f(a))$ 로 놓으면 점 B는
 점 A와 직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이므로 B $(f(a), a)$ 이다.
 또, 점 C는 점 B와 y 좌표가 같으므로 C (x, a) 로 놓으면 $f(x) = a$
 이므로
 $x = f^{-1}(a) \quad \therefore C(f^{-1}(a), a)$
 그런데 점 D는 점 C와 직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이므로
 D $(a, f^{-1}(a))$
 따라서, 점 D의 y 좌표는 $f^{-1}(a)$ 이다.

13. 함수 $f(x)$ 가 $f(x) = \begin{cases} 2x-9 & (x \geq 0) \\ \frac{2}{3}x-9 & (x < 0) \end{cases}$ 일 때, 방정식 $f(x) = f^{-1}(x)$ 의 모든 근의 합을 구하여라. (단, $f^{-1}(x)$ 는 $f(x)$ 의 역함수이다.)

▶ 답 :

▷ 정답 : -18

해설

함수 $y = f(x)$ 의 그래프와 직선 $y = x$ 의 교점의 x 좌표를 구하면

$2x - 9 = x$ 에서 $x = 9$

$\frac{2}{3}x - 9 = x$ 에서 $x = -27$

따라서, 방정식 $f(x) = f^{-1}(x)$ 의 모든 근의 합은

$9 + (-27) = -18$

14. 함수 $y = |x - 2| + |x + 1|$ 이 $x = m$ 일 때, 최솟값을 갖는다. 이를 만족시키는 정수 m 의 개수는?

① 1 개 ② 2 개 ③ 3 개 ④ 4 개 ⑤ 5 개

해설

$y = |x - 2| + |x + 1|$ 에서

i) $x < -1$ 일 때,

$$y = -(x - 2) - (x + 1) = -2x + 1$$

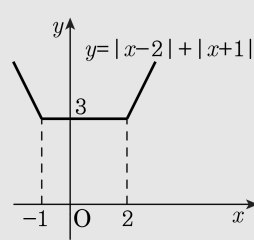
ii) $-1 \leq x < 2$ 일 때,

$$y = -(x - 2) + (x + 1)$$

iii) $x \geq 2$ 일 때,

$$y = (x - 2) + (x + 1) = 2x - 1 = 3$$

이상에서 주어진 함수의 그래프가 다음 그림과 같으므로 y 의 최솟값은 3 이고 이때, 정수 m 은 $-1, 0, 1, 2$ 의 4 개다.

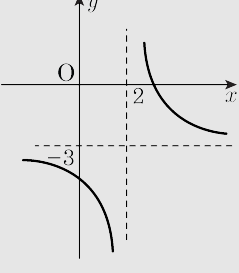


15. 다음 중 함수 $y = \frac{-3x+8}{x-2}$ 의 그래프는 제 a 사분면을 지나지 않고, 점 $(0, b)$ 를 지난다고 할 때, $a-b$ 의 값은?

- ① -6
- ② -4
- ③ 0
- ④ 4
- ⑤ 6

해설

$$y = \frac{-3(x-2)+2}{x-2} = -3 + \frac{2}{x-2}$$



따라서 제2사분면을 지나지 않는다. $\therefore a = 2$

$x = 0$ 일 때 $y = -3 + \frac{2}{-2} = -4, \therefore b = -4$

$\therefore a - b = 2 - (-4) = 6$

16. 분수함수 $f(x) = \frac{ax+5}{bx+c}$ 의 그래프는 점 $(1, 1)$ 을 지나고 점근선의 방정식이 $x = \frac{1}{2}, y = -\frac{1}{3}$ 이다. $f(x)$ 의 역함수를 $g(x)$ 라 할 때 $g(0)$ 은?

- ① $-\frac{1}{2}$ ② $\frac{5}{2}$ ③ 3 ④ 4 ⑤ $\frac{22}{5}$

해설

$$y = \frac{ax+5}{bx+c} \text{에서}$$

$$\text{점근선 } x = -\frac{c}{b} = \frac{1}{2}, y = \frac{a}{b} = -\frac{1}{3}$$

$(1, 1)$ 을 지나므로

$$1 = \frac{a+5}{b+c}$$

$$2c = -b, 3a = -b, c = -3$$

$$\therefore y = \frac{-2x+5}{6x-3}$$

$$y^{-1} = \frac{3x+5}{6x+2}$$

$$g(x) = \frac{3x+5}{6x+2}$$

$$\therefore g(0) = \frac{5}{2}$$

17. 함수 $y = \frac{x+1}{x-2}$ 의 그래프에서 점근선의 방정식을 $x = a$, $y = b$ 라 할 때, 함수 $y = \sqrt{ax+b}$ 의 역함수의 최솟값을 구하면?

- ① -1 ② $-\frac{1}{2}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ 1 ⑤ $\frac{3}{2}$

해설

$$y = \frac{x+1}{x-2} = 1 + \frac{3}{x-2}$$

$$\therefore \text{점근선은 } x = 2, y = 1$$

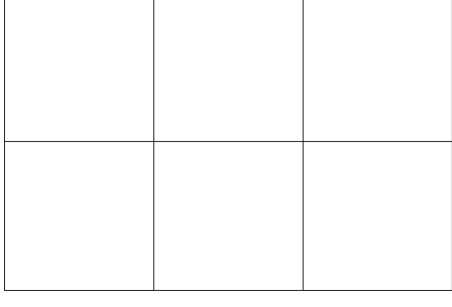
$$\therefore a = 2, b = 1$$

$$y = \sqrt{2x+1} \text{ 의 } \left(x \geq -\frac{1}{2}\right) \text{ 역함수는}$$

$$y = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2} \quad (x \geq 0)$$

$$\therefore \text{최솟값은 } -\frac{1}{2}$$

18. 다음 그림과 같은 6 개의 정사각형으로 이루어진 직사각형이 있다. 이 때, 적어도 두 개 이상의 정사각형을 색칠하는 서로 다른 방법의 수를 구하여라. (단, 직사각형은 고정되어 있다.)



▶ 답 : 6 가지

▷ 정답 : 57 가지

해설

전체 경우의 수는 $2^6 = 64$ (가지)이다.
여사건을 생각하면 모두 칠하지 않거나 한 개의 정사각형만 칠하는 경우이므로 $1 + 6 = 7$
따라서 구하는 경우의 수는 $64 - 7 = 57$

19. 2010년 대선에 남자 4명, 여자 3명의 후보자가 나왔다. 후보자들의 합동 토론회가 끝난 후 기념 촬영을 할 때, 다음 두 조건을 만족하도록 일렬로 세우는 경우의 수를 구하여라.

(가) 특정한 남자 후보 2명을 양쪽 끝에 세운다.
(나) 남자 후보끼리 나란하지 않도록 세운다.

▶ 답 : 가지

▷ 정답 : 24가지

해설

양쪽 끝에 특정한 2명의 남자 후보를 세우는 방법의 수는 2가지이고, 나머지 남자 후보 2명과 여자 후보 3명을 남자 후보가 나란하지 않도록 세우는 방법은 $2! \times 3!$ 이므로
구하는 방법의 수는 $2 \times 2! \times 3! = 24$ (가지)

20. n 명을 일렬로 세울 때, 이 중 특정한 A 가 특정한 B 보다 항상 앞에 오도록 세우는 방법의 수는?

① $\frac{n!}{2}$

② $n!$

③ $(n-1)!$

④ $\frac{(n-1)!}{2}$

⑤ $2(n-1)!$

해설

특정한 A 가 특정한 B 보다 항상 앞에 오도록 세우기 위해서는 A 와 B 의 순서가 항상 고정되어 있어야 한다.

$\times \times A \times \cdots \times B \times \cdots \times$

즉, A 와 B 의 순서가 바뀔 수 없으므로 A, B 를 같은 A 로 놓고, 일렬로 나열하는

$\times \times A \times \cdots \times A \times \cdots \times$ 방법의 수를 구하는 것과 같다.

따라서, 특정한 A 가 특정한 B 보다 항상 앞에 오도록 세우는

방법의 수는 $\frac{n!}{2!} = \frac{n!}{2}$