1. 자연수 전체의 집합 N에서 N으로의 함수에 대하여 $f(x) = (x$를 3으로 나눈 나머지 $)$로 정의할 때, 다음 보기 중 옳은 것을 골라라.

보기

㉠ $f(10) = 1$

㉡ $f(x) = 2$ 를 만족하는 두 자리 자연수 x의 개수는 29개이다.

㉢ 임의의 자연수에 대하여 $f(x) = f(x^2)$이다.

▶ 답 :

▷ 정답 : ㉠

해설

㉠ $10 = 3 \times 3 + 1$ 즉 나머지 1

$\therefore\ f(10) = 1$

㉡ $f(x) = 2$를 만족하는 자연수는 x를 3으로 나누면 나머지가 2 이므로 $x = 3n + 2$ $(n$ 은 음이 아닌 정수$)$이고 두 자리수이므로

$10 \le 3n + 2 \le 99$, 즉 $8 \le 3n \le 97$, $\dfrac{8}{3} \le n \le \dfrac{97}{3}$

$\therefore\ n = 3,\ 4,\ 5,\ 6\ \cdots$, 32 이므로 30개이다.

㉢ $x = 2$일 때, $f(2) = 2$이고 $f(2^2) = f(3 \times 1 + 1) = 1$ 이므로 $f(x) \neq f(x^2)$이다.

따라서, 옳은 것은 ㉠뿐이다.

2. 자연수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)$ 가 다음 두 조건을 만족시킬 때, $f(1280)$ 의 값은 얼마인가?

(i) $f(2x) = f(x)\ (x = 1, 2, 3, \ldots)$ (ii) $f\,(2x+1) = 2^x\ (x = 0, 1, 2, 3, \cdots)$

① 2 ② 4 ③ 8 ④ 16 ⑤ 32

해설

$1280 = 2^8 \cdot 5$ 이므로,

$$f(2^8 \cdot 5) = f(2^7 \cdot 5) = f(2^6 \cdot 5) = \cdots = f(5)$$

$$= f(2 \cdot 2 + 1)$$이므로,

$$f\,(2 \cdot 2 + 1) = 2^2 = 4$$

3. 실수 전체의 집합 R 에서 R 로의 함수 $f(x) = a|x-1| + (2-a)x + a$ 가 일대일대응이 되기 위한 실수 a 의 값의 범위는?

① $a < -1$　　② $-1 < a < 1$　　③ $0 < a < 1$

④ $a < 1$　　⑤ $a < -1,\ a > 1$

해설

$f(x)$ 가 일대일대응이 되기 위해서는
$x \geq 1$ 에서 $f(x)$ 가 증가함수이므로
$x < 1$ 에서도 $f(x)$ 는 증가함수이어야 한다.
$\therefore\ -2(a-1) > 0$
$\therefore\ a < 1$

4. 집합 $U=\{1,2,3,4\}$ 의 부분집합 X, Y 가 $X\cup Y=U$, $X\cap Y=\varnothing$ 을 만족한다고 한다. 이 때, X 에서 Y 로의 일대일 대응이 되는 함수 f 의 개수를 구하면?

▶ 답 : ______ 개

▷ 정답 : 12 개

해설

$U=\{1,2,3,4\}$ 에서 $X,\ Y\subset U,\ X\cup Y=U,$
$X\cup Y=\varnothing$ 이다.
$f\ :\ X\ \rightarrow\ Y$ 이 일대일 대응이 되려면
$n(X)=n(Y)$
$n(X\cup Y)=n(U)=4,\ X\cup Y=\varnothing$ 이므로
$n(X)+n(Y)=4$ 이다.
$\therefore\ n(X)=n(Y)=2$
$X=\{\{1,2\},\{1,3\},\{1,4\},\{2,3\},\{2,4\},\{3,4\}\}$ 의 6 가지 경우가 생기며
X 에서 Y 로의 대응방법이 각각 2 가지씩 생기므로
$\therefore\ 2\times 6=12$

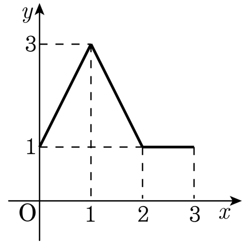
5. 두 집합 $A=\{-1,\ 0,\ 1\}$, $B=\{-2,\ -1,\ 0,\ 1, 2\}$ 에서 A 의 모든 원소 x 에 대하여 $f(x)=f(x^2)$ 으로 되는 A 에서 B 로의 함수 f 의 개수는?

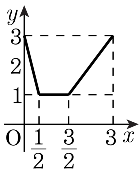
① 12 개 ② 20 개 ③ 25 개 ④ 27 개 ⑤ 30 개

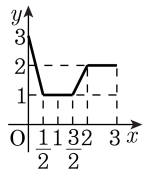
해설

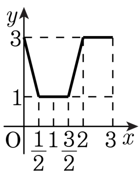
$f(-1)=f(1), f(0)=f(0)$ 이므로
A 의 원소 1 이 대응하는 방법의 수는 5 가지
A 의 원소 0 이 대응하는 방법의 수는 5 가지
$\therefore 5\times 5=25$ (가지)

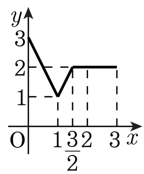
6. 함수
$y = f(x)\,(0 \le x \le 3)$ 의 그래프가 그림과 같을 때, 합성함수 $y = (f \circ f)(x)\,(0 \le x \le 3)$ 의 그래프는 무엇인가?

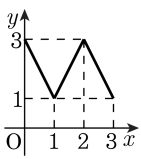


①


②


③


④


⑤


해설

$0 \le x \le 2$ 에서 $y = f(x)$ 의 그래프가
$x = 1$ 에 대하여 대칭이므로
$y = (f \circ f)(x)$ 의 그래프도
$0 \le x \le 2$ 에서 $x = 1$ 에 대하여 대칭이다.
$y = (f \circ f)(x) = f(f(x))$ 에서
$f(f(0)) = f(1) = 3$
$f(f(1)) = f(3) = 1$
$f(f(2)) = f(1) = 3$
$f(f(3)) = f(1) = 3$
따라서, $y = (f \circ f)(x)$ 를
그래프로 나타내면 ③과 같다.

7. 실수 전체의 집합 R에서 R로의 함수 f를 $f : x \to a|x-1|+(2-a)x+a$와 같이 정의한다. 함수 f의 역함수가 존재할 때, 상수 a의 값의 범위를 구하면?

① $a < 1$ ② $a > 1$ ③ $0 < a < 2$

④ $-\frac{1}{2} < a < 2$ ⑤ $0 < a < \frac{2}{3}$

해설

역함수가 존재하려면 일대일대응이어야 한다.

$f(x) = a|x-1| + (2-a)x + a$

$$= \begin{cases} 2x & (x \geq 1) \\ (2-2a)x + 2a & (x < 1) \end{cases}$$

가 일대일대응이려면 $x \geq 1$에서 증가함수이므로 $x < 1$에서도 증가함수 이어야 한다.

즉, $2 - 2a > 0$에서 $a < 1$

8. 함수 $f(x)$ 가 $f\left(\frac{x+1}{x-1}\right)=2x(x\neq 1)$ 를 만족할 때 $f(x)$ 의 역함수 $f^{-1}(x)$ 의 식은?

① $\frac{x+2}{x-2}(x\neq 2)$ ② $\frac{x+1}{x-2}(x\neq 2)$ ③ $\frac{x-1}{x-2}\ (x\neq -1)$

④ $\frac{x+2}{x+1}(x\neq -1)$ ⑤ $\frac{x+2}{x-1}(x\neq 1)$

해설

$f\left(\frac{x+1}{x-1}\right)=2x$ 에서

$\frac{x+1}{x-1}=t$ 로 놓으면 $x=\frac{t+1}{t-1}$

$\therefore f(t)=\frac{2(t+1)}{t-1},\ f(x)=\frac{2(x+1)}{x-1}$

$y=\frac{2(x+1)}{x-1}$ 이면

$yx-y=2x+2$ 에서 $x=\frac{y+2}{y-2}$

$\therefore f^{-1}(x)=\frac{x+2}{x-2}\ (x\neq 2)$

9. 세 함수 f, g, h 에 대하여 $f(x) = x + 4$, $g(x) = -2x + 3$ 이고 $\left(f^{-1} \circ g^{-1} \circ h\right)(x) = f(x)$ 가 성립할 때, $h^{-1}(5)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -9

해설

두 함수 $f(x) = x + 4$, $g(x) = -2x + 3$ 에 대하여

$f^{-1} \circ g^{-1} \circ h = f$ 이므로

$g^{-1} \circ h = f \circ f$, $h = g \circ f \circ f$

$$
\begin{aligned}
\therefore h(x) &= g(f(f(x))) \\
&= g(f(x+4)) \\
&= g((x+4)+4) \\
&= g(x+8) \\
&= -2(x+8)+3 = -2x-13
\end{aligned}
$$

$h^{-1}(5) = a$ 라고 하면 $h(a) = 5$

$-2a - 13 = 5$, $-2a = 18$

$\therefore a = -9$

$\therefore\ h^{-1}(5) = -9$

10. 함수 $f(x)$ 는 모든 함수 $h(x)$ 에 대하여 $(h \circ f \circ g)(x) = h(x)$ 를 만족시키고, $g(x) = 3x + 1$ 일 때, $f(7)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$(h \circ f \circ g)(x) = h(x)$ 에서

$h((f \circ g)(x)) = h(x)$ 이므로

$(f \circ g)(x) = x \Rightarrow \ f(g(x)) = x$

$f(3x + 1) = x$

$3x + 1 = t$ 로 두면 $x = \frac{1}{3}t - \frac{1}{3}$ 이고

$f(t) = \frac{1}{3}t - \frac{1}{3}$

$\therefore \ f(7) = \frac{7}{3} - \frac{1}{3} = 2$

11. $\begin{cases} 2x+1 & (x \geq 1) \\ x+2 & (x < 1) \end{cases}$ 에 대하여 $f^{-1}(5)+f^{-1}(k)=-2$ 일 때, k 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $k=-2$

해설

$f(x)=\begin{cases} 2x+1 & (x \geq 1) \\ x+2 & (x < 1) \end{cases}$ 에서

$x \geq 1$ 일 때, $f(x) \geq 3$ 이며

$x < 1$ 일 때, $f(x) < 3$ 이다.

이 때, $f^{-1}(5)+f^{-1}(k)=-2$ 에서

$f^{-1}(5)=a$ 라고 놓으면

$f(a)=5 \geq 3$ 이므로 $f(a)=2a+1=5$

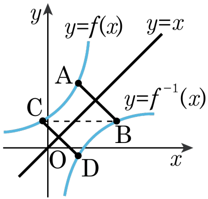
$\therefore a=2$

그러므로 $f^{-1}(k)=-4$

$f(-4)=-4+2=k$ $(\because -4<3)$

$\therefore k=-2$

12. 다음 그림은 함수 $y = f(x)$와 그 역함수 $y = f^{-1}(x)$의 그래프이다. 점 A의 x좌표가 a일 때, 점 D의 y좌표는?(단, 점선은 x축에 평행하다.)



① $-f^{-1}(a)$　　② $-f(a)$

③ a　　④ $f^{-1}(a)$

⑤ $f^{-1}(f^{-1}(a))$

해설

$\mathrm{A}\,(a,\ f(a))$로 놓으면 점 B는
점 A와 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 $\mathrm{B}\,(f(a),\ a)$이다.
또, 점 C는 점 B와 y좌표가 같으므로 $\mathrm{C}\,(x,\ a)$로 놓으면 $f(x)=a$이므로
$x=f^{-1}(a)$　　$\therefore C(f^{-1}(a),\ a)$
그런데 점 D는 점 C와 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 $\mathrm{D}(a,\ f^{-1}(a))$
따라서, 점 D의 y좌표는 $f^{-1}(a)$이다.

13. 함수 $f(x)$가 $f(x) = \begin{cases} 2x-9 & (x \geq 0) \\ \frac{2}{3}x - 9 & (x < 0) \end{cases}$ 일 때, 방정식 $f(x) = f^{-1}(x)$의 모든 근의 합을 구하여라. (단, $f^{-1}(x)$는 $f(x)$의 역함수이다.)

▶ 답 :

▷ 정답 : -18

해설

함수 $y = f(x)$의 그래프와 직선 $y = x$의 교점의 x좌표를 구하면

$2x - 9 = x$에서 $x = 9$

$\frac{2}{3}x - 9 = x$에서 $x = -27$

따라서, 방정식 $f(x) = f^{-1}(x)$의 모든 근의 합은

$9 + (-27) = -18$

14. 함수 $y = |x-2| + |x+1|$ 이 $x = m$ 일 때, 최솟값을 갖는다. 이를 만족시키는 정수 m 의 개수는?

① 1개 ② 2개 ③ 3개 ④ 4개 ⑤ 5개

해설

$y = |x-2| + |x+1|$ 에서

i) $x < -1$ 일 때,

$y = -(x-2) - (x+1) = -2x + 1$

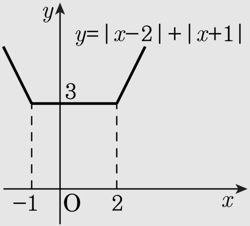
ii) $-1 \le x < 2$ 일 때,

$y = -(x-2) + (x+1)$

iii) $x \ge 2$ 일 때.

$y = (x-2) + (x+1) = 2x - 1 = 3$

이상에서 주어진 함수의 그래프가 다음 그림과 같으므로 y 의 최솟값은 3 이고 이때, 정수 m 은 $-1,\ 0,\ 1,\ 2$ 의 4 개다.

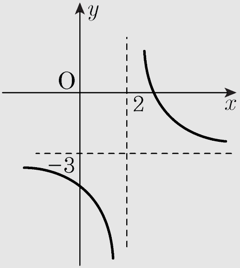


15. 다음 중 함수 $y=\dfrac{-3x+8}{x-2}$의 그래프는 제a사분면을 지나지 않고, 점 $(0,\ b)$를 지난다고 할 때, $a-b$의 값은?

① -6 ② -4 ③ 0 ④ 4 ⑤ 6

해설

$$y=\frac{-3(x-2)+2}{x-2}=-3+\frac{2}{x-2}$$



따라서 제2사분면을 지나지 않는다. $\therefore\ a=2$

$x=0$일 때 $y=-3+\dfrac{2}{-2}=-4$, $\therefore\ b=-4$

$\therefore\ a-b=2-(-4)=6$

16. 분수함수 $f(x)=\dfrac{ax+5}{bx+c}$ 의 그래프는 점 $(1,1)$ 을 지나고 점근선의 방정식이 $x=\dfrac{1}{2}, y=-\dfrac{1}{3}$ 이다. $f(x)$ 의 역함수를 $g(x)$ 라 할 때 $g(0)$ 은?

① $-\dfrac{1}{2}$ ② $\dfrac{5}{2}$ ③ 3 ④ 4 ⑤ $\dfrac{22}{5}$

해설

$y=\dfrac{ax+5}{bx+c}$ 에서

점근선 $x=-\dfrac{c}{b}=\dfrac{1}{2},\ y=\dfrac{a}{b}=-\dfrac{1}{3}$

$(1,\ 1)$ 을 지나므로

$1=\dfrac{a+5}{b+c}$

$2c=-b,\ 3a=-b,\ c=-3$

$\therefore y=\dfrac{-2x+5}{6x-3}$

$y^{-1}=\dfrac{3x+5}{6x+2}$

$g(x)=\dfrac{3x+5}{6x+2}$

$\therefore\ g(0)=\dfrac{5}{2}$

17. 함수 $y = \dfrac{x+1}{x-2}$ 의 그래프에서 점근선의 방정식을 $x = a,\ y = b$ 라 할 때, 함수 $y = \sqrt{ax+b}$ 의 역함수의 최솟값을 구하면?

① -1　　② $-\dfrac{1}{2}$　　③ $\dfrac{1}{2}$　　④ 1　　⑤ $\dfrac{3}{2}$

해설

$$y = \frac{x+1}{x-2} = 1 + \frac{3}{x-2}$$

$\therefore$ 점근선은 $x = 2,\ y = 1$

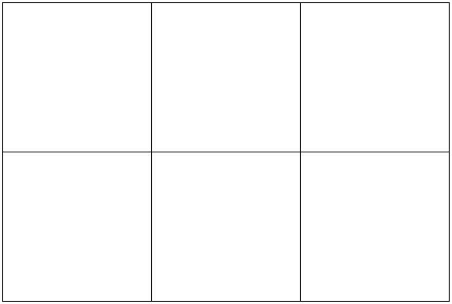
$\therefore\ a = 2,\ b = 1$

$y = \sqrt{2x+1}$ 의 $\left(x \geq -\dfrac{1}{2}\right)$ 역함수는

$$y = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2} \quad (x \geq 0)$$

$\therefore$ 최솟값은 $-\dfrac{1}{2}$

18. 다음 그림과 같은 6 개의 정사각형으로 이루어진 직사각형이 있다. 이때, 적어도 두 개 이상의 정사각형을 색칠하는 서로 다른 방법의 수를 구하여라. (단, 직사각형은 고정되어 있다.)



▶ **답 :** ______가지

▷ **정답 :** 57가지

해설

전체 경우의 수는 $2^6 = 64$ (가지) 이다.
여사건을 생각하면 모두 칠하지 않거나 한 개의 정사각형만 칠하는 경우이므로 $1 + 6 = 7$
따라서 구하는 경우의 수는 $64 - 7 = 57$

19. 2010년 대선에 남자 4명, 여자 3명의 후보자가 나왔다. 후보자들의 합동 토론회가 끝난 후 기념 촬영을 할 때, 다음 두 조건을 만족하도록 일렬로 세우는 경우의 수를 구하여라.

(가) 특정한 남자 후보 2명을 양쪽 끝에 세운다.
(나) 남자 후보끼리 나란하지 않도록 세운다.

▶ 답 : ______ 가지

▷ 정답 : 24 가지

해설

양쪽 끝에 특정한 2명의 남자 후보를 세우는 방법의 수는 2가지이고, 나머지 남자 후보 2명과 여자 후보 3명을 남자 후보가 나란하지 않도록 세우는 방법은 $2! \times 3!$ 이므로
구하는 방법의 수는 $2 \times 2! \times 3! = 24$ (가지)

20. n명을 일렬로 세울 때, 이 중 특정한 A가 특정한 B보다 항상 앞에 오도록 세우는 방법의 수는?

① $\frac{n!}{2}$ ② $n!$ ③ $(n-1)!$

④ $\frac{(n-1)!}{2}$ ⑤ $2(n-1)!$

해설

특정한 A가 특정한 B보다 항상 앞에 오도록 세우기 위해서는 A와 B의 순서가 항상 고정되어 있어야 한다.

$\times \times A \times \cdots \times B \times \cdots \times$

즉, A와 B의 순서가 바뀔 수 없으므로 A, B를 같은 A로 놓고, 일렬로 나열하는

$\times \times A \times \cdots \times A \times \cdots \times$방법의 수를 구하는 것과 같다.

따라서, 특정한 A가 특정한 B보다 항상 앞에 오도록 세우는 방법의 수는 $\frac{n!}{2!} = \frac{n!}{2}$