1. 공집합이 아닌 집합 X를 정의역으로 하는 두 함수 $f(x) = x^2 - 2x + 3$, $g(x) = -2x + 7$ 에 대하여 두 함수가 서로 같은 함수가 되게 하는 집합 X의 개수를 구하면?

① 1개 ② 2개 ③ 3개 ④ 4개 ⑤ 5개

해설

$f(x) = g(x)$

즉 $x^2 - 2x + 3 = -2x + 7$

$x^2 = 4$

$\therefore \ x = \pm 2$

X는 집합 $\{-2,\ 2\}$의 공집합이 아닌 부분집합이어야 한다.

따라서 구하는 집합의 개수는 $2^2 - 1 = 3$ (개)

2. 두 집합 $A=\{1,\ 2,\ 3\}$, $B=\{4,\ 5,\ 6,\ 7\}$ 가 있다. A에서 B로의 일대일함수 f 중 $f(1)=4$ 를 만족하는 f 의 개수를 구하면?

① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

해설

$f(1)=4$ 이므로 $\{2,\ 3\}$ 에서
$\{5,\ 6,\ 7\}$ 로 가는 일대일 함수의 개수와 같다.
$\therefore\ 3\times2=6$

3. 두 집합 $A=\{-1,\ 0,\ 1\}$, $B=\{-2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2\}$ 에 대하여 A 에서 B 로의 함수 f 가 $x \in A$ 인 모든 x 에 대하여 $f(-x)=-f(x)$ 를 만족시킬 때, 함수 f 의 개수는 몇 개인가?

① 1 개 ② 2 개 ③ 3 개 ④ 4 개 ⑤ 5 개

해설

집합 A 에서 B 로의 함수 f 가
$f(-x)=-f(x)$ 를 만족시키려면
-1 이 대응할 수 있는 원소는
$-2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2$ 의 5 가지.
0 이 대응할 수 있는 원소는
$f(-0)=-f(0)$ 에서, $2f(0)=0$,
즉 0 의 1 가지
1 이 대응할 수 있는 원소는 $-f(-1)$ 의 1 가지
따라서, 함수 f 의 개수는 $5\times1\times1=5$ (개)

4. 일차함수 $f(x)$가 $f(0)=1$이고 모든 실수 x에 대하여 $f(f(x+1))=4x+3$을 만족할 때 $f(3)$의 값은?

① -5 ② -4 ③ -3 ④ -2 ⑤ -1

해설

$f(0)=1$ 이므로 $f(x)=ax+1(a\neq 0)$

$f(x+1)=ax+a+1$

$$\begin{aligned} f(f(x+1)) &= a(ax+a+1)+1 \\ &= a^2x+a^2+a+1 \end{aligned}$$

$a^2x+a^2+a+1=4x+3$ 에서

$(a^2-4)x+a^2+a-2=0$

$\therefore\ a^2-4=0,\ a^2+a-2=0$

$\therefore\ a=-2$

$\therefore\ f(x)=-2x+1 \quad \therefore\ f(3)=-5$

5. 두 함수 $f(x) = 4x^2+1,\ g(x) = 2x+2$에 대하여 $h \circ g = f$를 만족하는 함수 $h(x)$ 를 구하면?

① $h(x) = x^2 - 2x + 3$
② $h(x) = x^2 - 2x + 5$
③ $h(x) = x^2 - 4x + 5$
④ $h(x) = x^2 - 4x + 3$
⑤ $h(x) = x^2 - 4x + 2$

해설

$h \circ g = f \quad \Rightarrow \quad h = f \circ g^{-1}$

먼저 $g^{-1}(x)$ 를 구해보면

$y = 2x + 2$

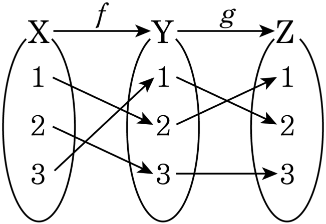
$\Rightarrow x = 2y + 2$

$\Rightarrow y = \dfrac{1}{2}x - 1 \cdots g^{-1}(x)$

$$\begin{aligned} \therefore\ h(x) &= (f \circ g^{-1})(x) \\ &= f(g^{-1}(x)) \\ &= 4\left(\frac{1}{2}x - 1\right)^2 + 1 \\ &= x^2 - 4x + 5 \end{aligned}$$

따라서 $h(x) = x^2 - 4x + 5$

6. 두 함수 f, g의 대응 관계가 다음 그림과 같을 때, $(f^{-1} \circ g)(2)$ 의 값은 얼마인가?



① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$(f^{-1} \circ g)(2) = f^{-1}(g(2)) = f^{-1}(1)$

f 의 역대응을 살펴보면 $f^{-1}(1) = 3$

7. 함수 $f(x)$ 의 역함수는 $f^{-1}(x) = 3x - 3$ 이고, 함수 $g(x)$ 를 $g(x) = f(2x-1)$ 로 정의할 때, $g(2)$ 의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$g(2) = f(2 \cdot 2 - 1) = f(3)$ 이다.

$f^{-1}(x) = 3x - 3 = 3$ 에서 $x = 2$

$\therefore f(3) = 2$

따라서 $g(2) = 2$

8. 함수 $y = 2|x-1|-2$ 의 그래프와 x 축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

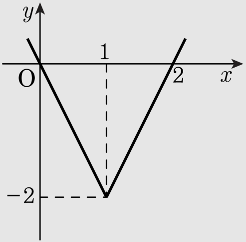
$y = 2|x-1|-2$

(i) $x < 1$ 일 때, $y = -2(x-1)-2 = -2x$

(ii) $x \geq 1$ 일 때, $y = 2(x-1)-2 = 2x-4$

따라서 $y = 2|x-1|-2$ 의 그래프와 x 축으로 둘러싸인 부분의 넓이는 다음 그림에서

$\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 = 2$



9. $y=\dfrac{ax+b}{x+c}$의 그래프는 점 $(2,\ 0)$을 지나고, $x=1,\ y=2$를 점근선으로 할 때, $a+b+c$의 값을 구하면?

① -1 ② $-\dfrac{1}{2}$ ③ -2 ④ $-\dfrac{3}{2}$ ⑤ -3

해설

$x=1,\ y=2$가 점근선이므로

$y=\dfrac{k}{x-1}+2$이다.

점$(2,\ 0)$을 지나므로 $k=-2$

$\therefore\ y=\dfrac{-2}{x-1}+2=\dfrac{-2+2(x-1)}{x-1}=\dfrac{2x-4}{x-1}$

$\therefore\ a=2,\ b=-4,\ c=-1$

$\therefore\ a+b+c=-3$

10. 함수 $y=\dfrac{2x+3}{x+4}$ 의 그래프는 점 (p,q) 에 대하여 대칭이고, 동시에 $y=x+r$ 에 대하여 대칭이다. 이때, $p+q+r$ 의 값은?

① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

해설

$$y=\frac{2x+3}{x+4}=\frac{2(x+4)-5}{x+4}=\frac{-5}{x+4}+2$$

따라서 $y=\dfrac{2x+3}{x+4}$ 의 그래프는 점 $(-4,2)$ 에 대하여 대칭이고,

점 $(-4,2)$ 를 지나고

기울기가 1 인 직선 $y=x+6$ 에 대하여 대칭이다.

$\therefore\ p=-4\ ,\ q=2\ ,\ r=6$

$\therefore\ p+q+r=-4+2+6=4$

11. 무리식 $\sqrt{2-x}+\dfrac{1}{\sqrt{x+3}}$ 의 값이 실수가 되도록 x의 범위를 정할 때, 정수 x의 개수는?

① 2개 ② 3개 ③ 4개 ④ 5개 ⑤ 6개

해설

$2-x \geq 0,\ \ x+3>0$

$\therefore -3<x\leq 2$ 이므로 정수의 개수는 5개

12. 두 실수 a, b에 대하여 $\dfrac{\sqrt{a-2}}{\sqrt{b+2}} = -\sqrt{\dfrac{a-2}{b+2}}$이 성립할 때, $|a-2|-|b-2|+\sqrt{(b-a)^2}$ 을 간단히 하면?

① 0　　② $2a-4$　　③ $4b$

④ -4　　⑤ $-2a+2b$

해설

$\dfrac{\sqrt{a-2}}{\sqrt{b+2}} = -\sqrt{\dfrac{a-2}{b+2}}$ 가 성립한다면

$a-2 \geq 0,\ b+2 < 0 \Rightarrow a \geq 2,\ b < -2$

$|a-2|-|b-2|+\sqrt{(b-a)^2}$

$= a-2+(b-2)+|b-a| = a-2+b-2+a-b = 2a-4$

13. $x = \dfrac{1}{2+\sqrt{3}}$, $y = \dfrac{1}{2-\sqrt{3}}$ 일 때, $x^3 + y^3$ 의 값은?

① $8\sqrt{3}$　② $24\sqrt{3}$　③ $30\sqrt{3}$　④ 48　⑤ 52

해설

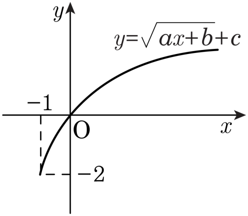
$$x = \frac{1}{2+\sqrt{3}} = 2-\sqrt{3},$$

$$y = \frac{1}{2-\sqrt{3}} = 2+\sqrt{3}$$

$$x+y=4, \quad xy=1$$

$$\begin{aligned} x^3+y^3 &= (x+y)^3 - 3xy(x+y) \\ &= 4^3 - 3\times 4 = 52 \end{aligned}$$

14. 함수 $y=\sqrt{ax+b}+c$ 의 그래프가 다음 그림과 같을 때, $a+b+c$ 의 값을 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

주어진 그래프에서 $y=\sqrt{ax+b}+c$ 의 그래프는 $y=\sqrt{ax}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 -1 만큼, y 축의 방향으로 -2 만큼 평행이동한 것이므로

$y=\sqrt{ax+b}+c$

$\Leftrightarrow \quad y=\sqrt{a(x+1)}-2$

이것이 원점을 지나므로 $0=\sqrt{a(0+1)}-2$

$\therefore \sqrt{a}=2 \quad \Rightarrow \quad a=4$

$y=\sqrt{4x+4}-2$

$\therefore a+b+c=4+4-2=6$

15. $1 \le x \le a$일 때, $y = \sqrt{2x-1}+3$의 최솟값이 m, 최댓값이 6이다. $a+m$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 9

해설

$1 \le x \le a$에서, 함수 $y = \sqrt{2x-1}+3$은 증가함수이므로
$x=1$ 일때 최솟값을 가진다.
곧, $m = \sqrt{2-1}+3 = 4$
$\therefore m = 4$
또한, $x = a$일 때 최댓값을 가지므로
$6 = \sqrt{2a-1}+3$
$\therefore a = 5$
$\therefore a + m = 9$

16. 함수 $y=\sqrt{2x}$ 의 그래프를 x축의 방향으로 a 만큼 평행이동한 그래프가 나타내는 함수의 식을 $y=f(x)$ 라 할 때, $y=f(x)$ 와 $y=f^{-1}(x)$ 의 그래프가 접하도록 상수 a 의 값을 구하면?

① $-\frac{1}{2}$ ② $-\frac{1}{4}$ ③ 0 ④ $\frac{1}{4}$ ⑤ $\frac{1}{2}$

해설

함수 $y=\sqrt{2x}$ 의 그래프를
x축의 방향으로 a 만큼 평행이동한
그래프의 식은 $y=\sqrt{2(x-a)}$
$y=f(x)$ 와 $y=f^{-1}(x)$ 의 그래프는
직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이므로
$y=f(x)$ 와 $y=f^{-1}(x)$ 의 그래프가 접하려면
$y=\sqrt{2(x-a)}$ 의 그래프와 직선 $y=x$ 가 접해야 한다.
즉, $\sqrt{2(x-a)}=x$ 양변을 제곱하여 정리하면
$x^2-2x+2a=0$

$\frac{D}{4}=(-1)^2-2a=0$ 이므로

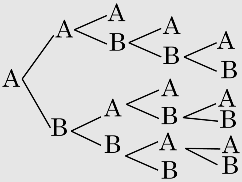
$a=\frac{1}{2}$

17. A, B 두 사람이 테니스 경기를 하는데, 경기는 5세트 중 3세트 이기는 쪽이 승리한다. A가 먼저 1승을 거둔 상태에서 승부가 결정될 때까지 일어날 수 있는 모든 경우의 수는?

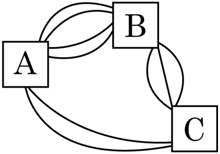
▶ 답 : ______ 가지

▷ 정답 : 10가지

해설



18. 아래쪽 그림과 같이 A 에서 B 로 가는 길은 4가지, B 에서 C 로 가는 길은 3가지, A 에서 C 로 가는 길은 2가지이다. A 에서 C 를 왕복하는데 B 를 한 번만 거치는 방법의 수를 구하여라.



▶ 답 : ______ 가지

▷ 정답 : 48 가지

해설

(i) $A-B-C-A$ 인 경우의 수는 $4\times3\times2=24$
(ii) $A-C-B-A$ 인 경우의 수는 $2\times3\times4=24$ 이상에서 구하는 방법의 수는
$24+24=48$

19. 100 원, 300 원, 500 원짜리 3 종류의 사탕이 있다. 이 사탕을 1000 원어치 사는 방법의 수는?

① 7 개 ② 10 개 ③ 13 개 ④ 15 개 ⑤ 17 개

해설

500 원을 기준으로 생각한다.

100 원을 A, 300 원을 B라 하면,

(1) 500 원 0 개 :

$(A, B) = (1, 3),\ (4, 2),\ (7, 1),\ (10, 0)$

(2) 500 원 1 개 : $(A, B) = (2, 1),\ (5, 0)$

(3) 500 원 2 개 : $(A, B) = (0, 0)$

$\therefore$ 총 7 개

20. 초등학생 4명, 중학생 3명, 고등학생 2명을 일렬로 세울 때, 초등학생은 초등학생끼리, 중학생은 중학생끼리 이웃하여 서는 방법의 수는?

① 3400 ② 3456 ③ 3500 ④ 3546 ⑤ 3650

해설

초등학생, 중학생을 각각 하나로 보면 4 명이 이웃하는 방법과 같다.

$\Rightarrow 4! = 24$

여기에 초등학생, 중학생끼리 자리를 바꾸는 방법을 각각 곱해준다.

$\therefore 24 \times 4! \times 3! = 3456$

21. a, b, c, d, e의 5개의 문자를 일렬로 나열할 때, c가 d보다 앞에 오게 되는 방법의 수는?

① 24 ② 30 ③ 60 ④ 72 ⑤ 120

해설

c와 d를 같은 문자로 생각하여 5개의 문자를 나열하는 방법과 같다.

$$\therefore \frac{5!}{2!} = 60$$

22. 남자 5 명, 여자 4 명이 있다. 이 중에서 남자 3 명, 여자 3 명을 뽑아 남녀 한 명씩 짝을 짓는 방법의 수를 구하여라.

▶ 답 : ______ 가지

▷ 정답 : 240 가지

해설

$${}_5C_3 \times {}_4C_3 \times 3! = 10 \times 4 \times 6 = 240$$

23. $X=\{1,2,3\}$ 에서 $Y=\{a,b,c,d,e\}$ 로 대응되는 함수 중 $x_1<x_2$ 이면 $f(x_1)<f(x_2)$ 인 함수의 개수를 구하여라.

▶ 답: ______ 개

▷ 정답: 10 개

해설

Y 의 원소 5 개 중 X 의 원소 1, 2, 3 에 대응될 원소 3 개를 뽑으면 된다.

${}_5C_3=10$