1. 실수 전체의 집합에서 정의된 두 함수 f, g 에 대하여 $f(x)$ 는 항등함수이고, $g(x) = -2$ 인 상수함수일 때, $f(4)+g(-1)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$f(x)$ 는 항등함수이므로 $f(x) = x$ 에서 $f(4) = 4$

$g(x) = -2$ 에서 $g(-1) = -2$

$\therefore f(4)+g(-1) = 4-2 = 2$

2. 두 집합 $X = \{1,\ 2,\ 3\}$, $Y = \{a,\ b,\ c,\ d\}$ 에 대하여 X 에서 Y 로 대응되는 함수의 개수를 a, 일대일 대응의 개수를 b 라 할 때, $a + b$ 의 값을 구하여라.

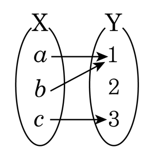
▶ 답 :

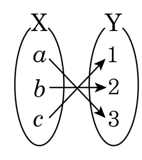
▷ 정답 : $a + b = 64$

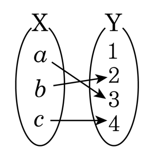
해설

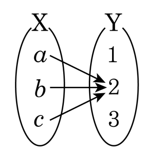
정의역과 공역의 개수가 다르므로
일대일 대응은 없고, 정의역의 개수가 A
공역의 개수가 B 일 때 함수 개수는 B^A 이다.
$\therefore\ 4^3 = 64$
$\therefore\ a + b = 64$

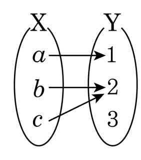
3. 다음 함수 중에서 역함수가 존재하는 것을 고르면?

①


②


③


④


⑤


해설

주어진 함수 중 일대일대응인 것은 ② 번이다.

4. 두 함수 $f(x) = x + 2$, $g(x) = 2x - 3$일 때, 합성함수 $g \circ f$의 역함수 $(g \circ f)^{-1}(x)$를 구하면 무엇인가?

① $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$　② $y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$　③ $y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$
④ $y = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$　⑤ $y = \frac{1}{2}x + 1$

해설

$$\begin{aligned}(g \circ f)(x) &= g(f(x)) = g(x+2) \\ &= 2(x+2) - 3 = 2x + 1\end{aligned}$$

합성함수 $g \circ f$는 일대일대응이므로
역함수가 존재한다.
$y = 2x + 1$로 놓고 x에 대하여 풀면
$x = \frac{y}{2} - \frac{1}{2}$ 이 된다.

따라서, $(g \circ f)^{-1}(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$ 이다.

5. 유한집합 X 에서 유한집합 Y 로의 함수 f 의 역함수 f^{-1} 가 존재한다고 한다. 다음 설명 중 옳지 않은 것을 고르면?

① $n(X) = n(Y)$이다.

② $x_1 \neq x_2$이면 $f(x_1) \neq f(x_2)$ 이다.

③ $y = f(x)$와 $y = f^{-1}(x)$ 의 그래프는 직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이다.

④ $f(a) = b$ 이면 $f^{-1}(b) = a$ 이다.

⑤ $y = f(x)$ 의 정의역은 $y = f^{-1}(x)$ 의 정의역과 일치한다.

해설

⑤ (f 의 정의역) = (f^{-1} 의 치역)
(f^{-1} 의 정의역) = (f 의 치역)

6. $y=\dfrac{3x+1}{2x-1}$ 의 점근선의 방정식을 구하면 $x=a,\ y=b$ 이다. $a+b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $a+b=2$

해설

$y=\dfrac{3x+1}{2x-1}$

$=\dfrac{3\left(x-\frac{1}{2}\right)+\frac{5}{2}}{2\left(x-\frac{1}{2}\right)}$

$=\dfrac{\frac{5}{2}}{2\left(x-\frac{1}{2}\right)}+\dfrac{3}{2}$

따라서 점근선의 방정식은 $x=\dfrac{1}{2},\ y=\dfrac{3}{2}$

$\therefore\ a=\dfrac{1}{2}, b=\dfrac{3}{2}\quad a+b=2$

7. 분수함수 $y=\dfrac{ax+b}{x-1}$ 의 그래프와 그 역함수의 그래프가 모두 점 $(2,\ 3)$ 을 지날 때, 상수 a, b 의 곱 ab 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 1

해설

$f(x)=\dfrac{ax+b}{x-1}$ 라 하면 $f(2)=3,\ f^{-1}(2)=3$

$f(2)=2a+b=3\cdots$ ㉠

$f^{-1}(2)=3$ 에서 $f(3)=2$ 이므로

$f(3)=\dfrac{3a+b}{2}=2 \quad \therefore 3a+b=4\cdots$ ㉡

㉠, ㉡ 을 연립하여 풀면

$a=1,\ b=1 \quad \therefore ab=1$

8. 함수 f 의 정의역이 $A = \{x \mid 0 \le x \le 1\}$이고,

$f(x) = \begin{cases} 0 & (x \in Q) \\ 1 & (x \notin Q) \end{cases}$ 이라고 한다. 위 함수의 그래프에 대한 설명 중 맞는 것은?(Q는 유리수 전체의 집합)

① 부등식 $y \ge x(0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1)$ 의 영역 안에 있는 점은 없다.

② 부등식 $y \ge x(0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1)$ 의 영역 안에 있는 점은 1 개이다

③ 부등식 $y \ge x(0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1)$ 의 영역 안에 있는 점은 무수히 많다.

④ 부등식 $y < x(0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1)$ 의 영역 안에 있는 점은 없다.

⑤ 부등식 $y < x(0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1)$ 의 영역 안에 있는 점은 1 개이다.

해설

함수 f 의 그래프를 그리면 y값이 0, 1인 점이 조밀하게 평면 위에 있다.
따라서 부등식 $y \ge x,\ \ y < x$ 의 영역 안에도 무수히 많다

9. $\frac{1}{x(x+1)}+\frac{x}{(x+1)(2x+1)}+\frac{x}{(2x+1)(3x+1)}-\frac{2x+1}{x(3x+1)}$ 을 간단히 하면 ?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ $\frac{2}{3}$

해설

주어진 식을 이항분리시키면,

$$\begin{aligned}(\text{준식}) &= \left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}\right)+\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{2x+1}\right)\\ &\quad+\left(\frac{1}{2x+1}-\frac{1}{3x+1}\right)-\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{3x+1}\right)\\ &= 0\end{aligned}$$

10. $x^2 - 7x + 1 = 0$ 일 때 $x^2 + \frac{1}{x^2}$ 의 값은?

① 45　　② 46　　③ 47　　④ 48　　⑤ 49

해설

x로 나누면, $x - 7 + \frac{1}{x} = 0$

$x + \frac{1}{x} = 7$

$x^2 + \frac{1}{x}^2 = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2 = 7^2 - 2 = 47$

11. 무리식 $\sqrt{2-x}+\dfrac{1}{\sqrt{x+3}}$ 의 값이 실수가 되도록 x의 범위를 정할 때, 정수 x의 개수는?

① 2개 ② 3개 ③ 4개 ④ 5개 ⑤ 6개

해설
$2-x \geq 0,\ x+3>0$
$\therefore -3<x\leq 2$ 이므로 정수의 개수는 5개

12. $-1 < a < 3$ 일 때, $\sqrt{a^2+2a+1}+\sqrt{a^2-6a+9}$ 를 간단히 하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

(준식) $= \sqrt{(a+1)^2}+\sqrt{(a-3)^2}$
$=|a+1|+|a-3|=(a+1)-(a-3)=4$

13. $f(x)=\sqrt{x}+\sqrt{x+1}$일 때, $\frac{1}{f(1)}+\frac{1}{f(2)}+\cdots+\frac{1}{f(99)}$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 9

해설

$f(x)=\sqrt{x}+\sqrt{x+1}$ 이므로

$\frac{1}{f(x)}=\sqrt{x+1}-\sqrt{x}$

$\therefore$ (준 식) $=(\sqrt{2}-1)+(\sqrt{3}-\sqrt{2})+(\sqrt{4}-\sqrt{3})+\cdots+(\sqrt{100}-\sqrt{99})$
$=\sqrt{100}-1=10-1=9$

14. $\sqrt{4+2\sqrt{3}}$의 정수 부분을 a, 소수 부분을 b라고 할 때, $\frac{a}{b}=p+\sqrt{q}$이다. $p+q$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

$\sqrt{4+2\sqrt{3}}=\sqrt{3}+1=2.\times\times\times$

$a=2,\ b=\sqrt{3}-1$

$\frac{a}{b}=\frac{2}{\sqrt{3}-1}=\frac{2(\sqrt{3}+1)}{2}=\sqrt{3}+1$

$\therefore p=1,\ q=3$

$\therefore p+q=4$

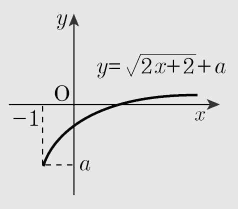
15. 함수 $y = \sqrt{2x+2}+a$ 의 그래프가 제 1 , 3 , 4 사분면을 지나도록 하는 정수 a의 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -2

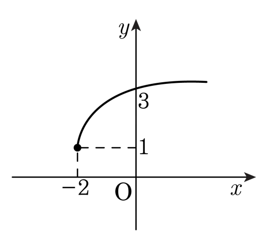
해설

$y = \sqrt{2x+2}+a = \sqrt{2(x+1)}+a$
주어진 함수는 $y = \sqrt{2x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 -1 만큼, y 축의 방향으로 a 만큼 평행이동한 것이다.
따라서 이 함수의 그래프가 제 1 , 3 , 4 사분면을 지나려면 $x = 0$ 일 때, $y < 0$이어야 한다.



$\sqrt{2}+a < 0$ 이므로 $a < -\sqrt{2}$
따라서 정수 a의 최댓값은 -2이다.

16. 무리함수 $y=\sqrt{ax+b}+c$의 그래프가 다음 그림과 같을 때, $a+b+c$의 값을 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : 7

해설

주어진 그래프는 $y=\sqrt{ax}$ 의 그래프를 x 축으로 -2 만큼, y 축으로 1만큼 평행이동한 것과 같으므로 $y=\sqrt{a(x+2)}+1$

또, 점 $(0,\ 3)$ 을 지나므로

$3=\sqrt{2a}+1,\ \ \sqrt{2a}=2$

$\therefore\ a=2$

따라서 $y=\sqrt{2(x+2)}+1=\sqrt{2x+4}+1$ 이고,

이것이 $y=\sqrt{ax+b}+c$ 와 일치하므로

$a=2,\ b=4,\ c=1$

$\therefore\ a+b+c=7$

17. $8 \le x \le a$ 에서 함수 $y = -\sqrt{x+1} + 3$ 의 최댓값이 b , 최솟값이 -1 일 때, $a+b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 15

해설

$y = -\sqrt{x+1} + 3$ 의 그래프는 $y = -\sqrt{x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 -1 만큼, y 축의 방향으로 3 만큼 평행이동한 것이므로 x 의 값이 증가할 때, y 의 값은 감소한다.
$x = a$ 일 때 최솟값을 가지므로
$-1 = -\sqrt{a+1} + 3 \quad \therefore\ a = 15$
$x = 8$ 일 때 최댓값을 가지므로
$b = -\sqrt{8+1} + 3 = 0$
$\therefore\ a + b = 15 + 0 = 15$

18. 양의 실수 전체의 집합에서 정의된 두 함수 $f(x) = \frac{x}{1+x}$, $g(x) = \sqrt{x}$ 에 대하여

$(f \circ g)(a) = \frac{1}{2}$ 일 때, $(g \circ f)(4a)$ 의 값은? (단, $(a > 0)$)

① $\frac{\sqrt{5}}{5}$　② $\frac{2\sqrt{5}}{5}$　③ $\frac{3\sqrt{5}}{5}$　④ $\frac{4\sqrt{5}}{5}$　⑤ $\frac{6\sqrt{5}}{5}$

해설

$(f \circ g)(a) = f(g(a)) = f(\sqrt{a}) = \frac{\sqrt{a}}{1+\sqrt{a}}$ 이므로

$\frac{\sqrt{a}}{1+\sqrt{a}} = \frac{1}{2}$, $2\sqrt{a} = 1 + \sqrt{a}$

$\sqrt{a} = 1 \quad \therefore a = 1$

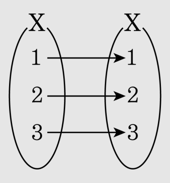
$$\therefore (g \circ f)(4a) = (g \circ f)(4) = g(f(4)) = g\left(\frac{4}{5}\right)$$
$$= \sqrt{\frac{4}{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

19. 집합 $X = \{1,\ 2,\ 3\}$ 에 대하여 함수 $f : X \to X$ 가 일대일 대응이고, $f \circ f = f$ 를 만족하는 함수는 모두 몇 개인가?

① 1 개　② 2 개　③ 3 개　④ 4 개　⑤ 5 개

해설

함수 $f : X \to X$ 가 일대일 대응이 되는 경우는 6 가지이고 이 중에서 $f \circ f = f$
즉 $f = I$ (항등함수)를 만족하는 것은 하나 뿐이다.



20. 함수 $f(x) = x^2 - 4x + 6(x \geq 2)$ 의 역함수를 $g(x)$ 라고 할 때, $y = f(x)$ 와 $y = g(x)$ 의 그래프의 두 교점 사이의 거리를 구하면?

① -1 ② $-\sqrt{2}$ ③ 1 ④ $\sqrt{2}$ ⑤ 2

해설

함수 $y = f(x)$ 와 $y = g(x)$ 의 그래프는 직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이므로 두 함수의 그래프의 교점은 $y = f(x)$ 의 그래프와 직선 $y = x$ 의 그래프의 교점과 같다.

$y = x^2 - 4x + 6$ 과 $y = x$ 를 연립하면

$x^2 - 5x + 6 = 0,\ (x-2)(x-3) = 0$

$\therefore x = 2$ 또는 $x = 3$

$\therefore x = 2,\ y = 2$ 또는 $x = 3,\ y = 3$

즉, 두 교점은 점 $(2,\ 2), (3,\ 3)$ 이다.

따라서, 구하는 두 교점 사이의 거리는

$\sqrt{(3-2)^2 + (3-2)^2} = \sqrt{2}$

21. 함수 $y = a\,|\,x+1\,|\,-b\,|\,x-1\,|\,+2$ 의 그래프가 y축에 대하여 대칭이기 위한 필요충분조건을 구하면?

① $a+b=0$ ② $a-b=0$ ③ $a+b=1$
④ $a-b=1$ ⑤ $a+b=2$

해설

$y=f(x)$ 의 그래프가 y축에 대하여 대칭이면 $f(x)=f(-x)$ 이다.
$f(x)=a\,|\,x+1\,|\,-b\,|\,x-1\,|\,+2$ 라 하면
$f(-x)=a\,|\,-x+1\,|\,-b\,|\,-x-1\,|\,+2$
$=-b\,|\,x+1\,|\,+a\,|\,x-1\,|\,+2$
$f(x)=f(-x)$ 에서 $a=-b$
$\therefore\ a+b=0$

22. 집합 $X = \{-1, 0, 1\}$ 에서 X 로의 함수 중 그 그래프가 원점에 대하여 대칭인 함수를 f 라 한다. <보기> 중 옳은 것을 모두 고르면?

보기

㉠ X 의 모든 원소 x 에 대하여 $f(-x) = f(x)$ 이다.

㉡ 함수 f 의 개수는 3개이다.

㉢ 함수 f 는 역함수를 갖는다.

① ㉠　② ㉡　③ ㉢　④ ㉠, ㉡　⑤ ㉡, ㉢

해설

㉠ 원점에 대하여 대칭이므로
$f(-x) = -f(x)$ 이다. $\therefore$ 거짓
㉡ i) $f(-1) = 1,\ f(0) = 0,\ f(1) = -1$
ii) $f(-1) = 0,\ f(0) = 0,\ f(1) = 0$
iii) $f(-1) = -1,\ f(0) = 0,\ f(1) = 1$ 로 3개이다.
$\therefore$ 참
㉢ 위 ㉡에서 ii)는 일대일대응이 아니므로
역함수를 갖지 않는다. $\therefore$ 거짓

23. 전 구간을 일정한 속도 60 km/h 로 달리도록 되어 있는 어느 고속도로에서 하행하던 고속버스가 5 분 동안에 상행하는 같은 회사 소속의 고속버스 20 대를 보았다. 이 고속버스의 배차 간격이 일정할 때, 100 km 의 상행선에는 약 몇 대의 고속버스가 달리고 있는가?

① 50 대 ② 100 대 ③ 120 대
④ 150 대 ⑤ 200 대

해설

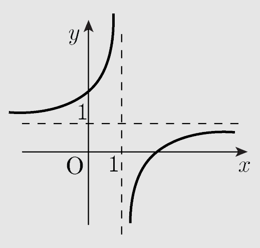
각 방향으로 시속 60 km 로 달리고 있으므로 어느 한 방향에 대한 다른 방향의 상대 속도는 시속 120 km 이다.
이때, 5 분 동안의 주행 거리는 $120\times\frac{5}{60}=120\times\frac{1}{12}=10(\mathrm{km})$ 이고, 이 사이를 달리는 동안에 20 대의 버스를 보았으므로 100 km 의 구간에는 200 대가 있다.

24. 분수함수 $y=\dfrac{x-4}{x-1}$ 의 정의역이 $\{x\mid -2\le x\le 0\}$ 일 때, 다음 중 치역을 바르게 구한 것은?

① $\{y \mid -2\le y\le 0\}$
② $\{y \mid -2\le y\le 2\}$
③ $\{y \mid -2\le y\le 4\}$
④ $\{y \mid 0\le y\le 2\}$
⑤ $\{y \mid 2\le y\le 4\}$

해설

$$y=\frac{x-4}{x-1}=\frac{(x-1)-3}{x-1}=1+\frac{-3}{x-1}$$



$x=-2$ 일 때, $y=\dfrac{-2-4}{-2-1}=2$ 이고,

$x=0$ 일 때, $y=\dfrac{-4}{-1}=4$ 이므로,

치역은 $\{y \mid 2\le y\le 4\}$

25. $0 \le x \le 2$일 때, 함수 $y = \dfrac{2x-4}{x-4}$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 한다. Mm의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$y = \dfrac{2x-4}{x-4} = \dfrac{4}{x-4} + 2$

$x = 0$일 때 최대이므로, $M = \dfrac{4}{0-4} + 2 = 1$

$x = 2$일 때 최소이므로, $m = \dfrac{4}{2-4} + 2 = 0$

$\therefore\ Mm = 1 \times 0 = 0$

26. $x = \sqrt{3-\sqrt{8}}$일 때 $\dfrac{x^3+x^2-3x+6}{x^4+2x^3+2x+9}$의 값은?

① 1　　② 2　　③ $\dfrac{1}{2}$　　④ $\dfrac{1}{4}$　　⑤ $\dfrac{1}{3}$

해설

$x = \sqrt{3-\sqrt{8}} = \sqrt{3-2\sqrt{2}} = \sqrt{2}-1$ 에서

$x+1 = \sqrt{2} \rightarrow x^2+2x-1=0$

분자 : x^3+x^2-3x+6

$= (x^2+2x-1)(x-1)+5 = 5$

분모 : x^4+2x^3+2x+9

$= (x^2+2x-1)(x^2+1)+10 = 10$

$\therefore$ 준식 $= \dfrac{5}{10} = \dfrac{1}{2}$

27. 삼차함수 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ 에 대하여 $g(x)=(x+1)f(x)-24x$ 로 정의 한다.
$g(0)=g(1)=g(2)=g(3)=0$ 일 때, $f(4)$ 의 값은 ?

① 20 ② 22 ③ 24 ④ 26 ⑤ 28

해설

$g(0)=g(1)=g(2)=g(3)=0$ 이므로
$g(x)=x(x-1)(x-2)(x-3)$ 이 된다.
즉, $(x+1)f(x)-24x=x(x-1)(x-2)(x-3)$
이 식에 $x=4$ 를 대입하면
$5f(4)-24\cdot 4=4\cdot 3\cdot 2\cdot 1$
$\therefore f(4)=24$

28. 집합 $A=\{1,\ 2,\ 3\}$에 대하여 A에서 A로의 두 함수 $f,\ g$가 일대일 대응이고 $f(2)=1$, $g(3)=3$, $(f\circ g)(1)=2$일 때, $(g\circ f)(1)+(g\circ f)(3)$의 값은?

① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

해설

$g(3)=3$이고 함수 g는 일대일 대응이므로 $g(1)=1$ 또는 $g(1)=2$이다.
만약 $g(1)=2$ 라고 가정하면
$(f\circ g)(1)=f(g(1))=f(2)=2$ 이다.
그러나 문제의 조건에서 $f(2)=1$ 이므로 모순이다.
따라서 $g(1)=1$ 이다.
$(f\circ g)(1)=f(g(1))=f(1)$ 이고
$(f\circ g)(1)=2$ 이므로 $f(1)=2$ 이다.
$f(1)=2$, $f(2)=1$ 이므로 $f(3)=3$ 이다.
$g(1)=1$, $g(3)=3$ 이므로 $g(2)=2$ 이다.

$$\begin{aligned}\therefore (g\circ f)(1)+(g\circ f)(3) &= g(f(1))+g(f(3))\\ &= g(2)+g(3)\\ &= 2+3=5\end{aligned}$$

29. 함수 $f(x) = 2x+5$ 에 대하여 $f^2 = f \circ f,\ f^3 = f^2 \circ f,\ \cdots,\ f^{n+1} = f^n \circ f$ 라 정의하자. 이 때, $f^n(x)$ 를 추정하고 $1+2+2^2+2^3+2^n = 2^{n+1}-1$ 임을 이용하여 $f^7(5)$ 의 값을 구하여라

▶ 답 :

▷ 정답 : 1275

해설

$f^2(x) = f(f(x)) = f(2x+5) = 2(2x+5)+5 = 2^2x+2\cdot5+5$

$f^3(x) = f(f^2(x)) = f(2^2x+2\cdot5+5) = 2(2^2x+2\cdot5+5)+5$

$= 2^3x+2^2\cdot5+2\cdot5+5$

이와 같이 계속하면 다음과 같이 추정할 수 있다.

$f^n(x) = 2^nx+2^{n-1}\cdot5+2^{n-2}\cdot5+\cdots+2\cdot5+5 = 2^nx+(5\cdot2^n-1)$

$\therefore\ f^7(5) = 5(2^7+2^6+\cdots+2+1) = 5(2^8-1) = 1275$