

1. 실수 전체의 집합에서 정의된 두 함수  $f, g$  에 대하여  $f(x)$  는 항등함수이고,  $g(x) = -2$  인 상수함수일 때,  $f(4) + g(-1)$  의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$f(x)$  는 항등함수이므로  $f(x) = x$  에서  $f(4) = 4$

$g(x) = -2$  에서  $g(-1) = -2$

$\therefore f(4) + g(-1) = 4 - 2 = 2$

2. 두 집합  $X = \{1, 2, 3\}$ ,  $Y = \{a, b, c, d\}$  에 대하여  $X$  에서  $Y$  로 대응되는 함수의 개수를  $a$ , 일대일 대응의 개수를  $b$  라 할 때,  $a+b$  의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 :  $a + b = 64$

### 해설

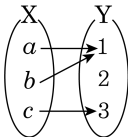
정의역과 공역의 개수가 다르므로  
일대일 대응은 없고, 정의역의 개수가  $A$   
공역의 개수가  $B$  일 때 함수 개수는  $B^A$  이다.

$$\therefore 4^3 = 64$$

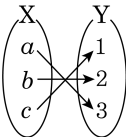
$$\therefore a + b = 64$$

3. 다음 함수 중에서 역함수가 존재하는 것을 고르면?

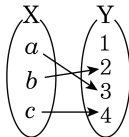
①



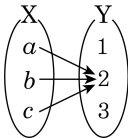
②



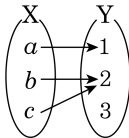
③



④



⑤



해설

주어진 함수 중 일대일대응인 것은 ②번이다.

4. 두 함수  $f(x) = x + 2$ ,  $g(x) = 2x - 3$  일 때, 합성함수  $g \circ f$  의 역함수  $(g \circ f)^{-1}(x)$  를 구하면 무엇인가?

①  $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$

②  $y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$

③  $y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$

④  $y = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$

⑤  $y = \frac{1}{2}x + 1$

#### 해설

$$\begin{aligned}(g \circ f)(x) &= g(f(x)) = g(x + 2) \\ &= 2(x + 2) - 3 = 2x + 1\end{aligned}$$

합성함수  $g \circ f$  는 일대일대응이므로  
역함수가 존재한다.

$y = 2x + 1$  로 놓고  $x$  에 대하여 풀면

$$x = \frac{y}{2} - \frac{1}{2} \text{ 이 된다.}$$

따라서,  $(g \circ f)^{-1}(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$  이다.

5. 유한집합  $X$  에서 유한집합  $Y$  로의 함수  $f$  의 역함수  $f^{-1}$  가 존재한다고 한다. 다음 설명 중 옳지 않은 것을 고르면?

①  $n(X) = n(Y)$ 이다.

②  $x_1 \neq x_2$ 이면  $f(x_1) \neq f(x_2)$  이다.

③  $y = f(x)$ 와  $y = f^{-1}(x)$  의 그래프는 직선  $y = x$  에 대하여 대칭이다.

④  $f(a) = b$  이면  $f^{-1}(b) = a$  이다.

⑤  $y = f(x)$  의 정의역은  $y = f^{-1}(x)$  의 정의역과 일치한다.

해설

⑤  $(f \text{ 의 정의역}) = (f^{-1} \text{ 의 치역})$

$(f^{-1} \text{ 의 정의역}) = (f \text{ 의 치역})$

6.  $y = \frac{3x+1}{2x-1}$ 의 점근선의 방정식을 구하면  $x = a$ ,  $y = b$ 이다.  $a + b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▶ 정답 :  $a + b = 2$

해설

$$\begin{aligned} y &= \frac{3x+1}{2x-1} \\ &= \frac{3\left(x - \frac{1}{2}\right) + \frac{5}{2}}{2\left(x - \frac{1}{2}\right)} \\ &= \frac{\frac{5}{2}}{2\left(x - \frac{1}{2}\right)} + \frac{3}{2} \end{aligned}$$

따라서 점근선의 방정식은  $x = \frac{1}{2}$ ,  $y = \frac{3}{2}$

$$\therefore a = \frac{1}{2}, b = \frac{3}{2} \quad a + b = 2$$

7. 분수함수  $y = \frac{ax+b}{x-1}$  의 그래프와 그 역함수의 그래프가 모두 점  $(2, 3)$  을 지날 때, 상수  $a, b$  의 곱  $ab$  의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$$f(x) = \frac{ax+b}{x-1} \text{ 라 하면 } f(2) = 3, f^{-1}(2) = 3$$

$$f(2) = 2a + b = 3 \cdots \textcircled{㉠}$$

$$f^{-1}(2) = 3 \text{ 에서 } f(3) = 2 \text{ 이므로}$$

$$f(3) = \frac{3a+b}{2} = 2 \quad \therefore 3a+b = 4 \cdots \textcircled{㉡}$$

㉠, ㉡ 을 연립하여 풀면

$$a = 1, b = 1 \quad \therefore ab = 1$$

8. 함수  $f$  의 정의역이  $A = \{x \mid 0 \leq x \leq 1\}$  이고,

$$f(x) = \begin{cases} 0 & (x \in Q) \\ 1 & (x \notin Q) \end{cases} \text{ 이라고 한다. 위 함수의 그래프에 대한 설명 중}$$

맞는 것은? ( $Q$ 는 유리수 전체의 집합)

- ① 부등식  $y \geq x (0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1)$  의 영역 안에 있는 점은 없다.
- ② 부등식  $y \geq x (0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1)$  의 영역 안에 있는 점은 1 개이다
- ③ 부등식  $y \geq x (0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1)$  의 영역 안에 있는 점은 무수히 많다.
- ④ 부등식  $y < x (0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1)$  의 영역 안에 있는 점은 없다.
- ⑤ 부등식  $y < x (0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1)$  의 영역 안에 있는 점은 1 개이다.

### 해설

함수  $f$  의 그래프를 그리면  $y$  값이 0, 1 인 점이 조밀하게 평면 위에 있다.

따라서 부등식  $y \geq x$ ,  $y < x$  의 영역 안에도 무수히 많다

9.  $\frac{1}{x(x+1)} + \frac{x}{(x+1)(2x+1)} + \frac{x}{(2x+1)(3x+1)} - \frac{2x+1}{x(3x+1)}$  을 간단히 하면 ?

① -2

② -1

③ 0

④ 1

⑤  $\frac{2}{3}$

해설

주어진 식을 이항분리시키면,

$$\begin{aligned}(\text{준식}) &= \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right) + \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{2x+1}\right) \\ &\quad + \left(\frac{1}{2x+1} - \frac{1}{3x+1}\right) - \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{3x+1}\right) \\ &= 0\end{aligned}$$

10.  $x^2 - 7x + 1 = 0$  일 때  $x^2 + \frac{1}{x^2}$  의 값은?

① 45

② 46

③ 47

④ 48

⑤ 49

해설

$$x \text{로 나누면, } x - 7 + \frac{1}{x} = 0$$

$$x + \frac{1}{x} = 7$$

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2 = 7^2 - 2 = 47$$

11. 무리식  $\sqrt{2-x} + \frac{1}{\sqrt{x+3}}$  의 값이 실수가 되도록  $x$ 의 범위를 정할 때,  
정수  $x$ 의 개수는?

① 2개

② 3개

③ 4개

④ 5개

⑤ 6개

해설

$$2 - x \geq 0, x + 3 > 0$$

$\therefore -3 < x \leq 2$  이므로 정수의 개수는 5개

12.  $-1 < a < 3$  일 때,  $\sqrt{a^2 + 2a + 1} + \sqrt{a^2 - 6a + 9}$ 를 간단히 하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

$$\begin{aligned}(\text{준식}) &= \sqrt{(a+1)^2} + \sqrt{(a-3)^2} \\ &= |a+1| + |a-3| = (a+1) - (a-3) = 4\end{aligned}$$

13.  $f(x) = \sqrt{x} + \sqrt{x+1}$  일 때,  $\frac{1}{f(1)} + \frac{1}{f(2)} + \cdots + \frac{1}{f(99)}$  의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 9

해설

$$f(x) = \sqrt{x} + \sqrt{x+1} \text{ 이므로}$$

$$\frac{1}{f(x)} = \sqrt{x+1} - \sqrt{x}$$

$$\begin{aligned} \therefore (\text{준 식}) &= (\sqrt{2} - 1) + (\sqrt{3} - \sqrt{2}) + \\ &\quad (\sqrt{4} - \sqrt{3}) + \cdots + (\sqrt{100} - \sqrt{99}) \\ &= \sqrt{100} - 1 = 10 - 1 = 9 \end{aligned}$$

14.  $\sqrt{4+2\sqrt{3}}$ 의 정수 부분을  $a$ , 소수 부분을  $b$ 라고 할 때,  $\frac{a}{b} = p + \sqrt{q}$ 이다.  $p+q$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

$$\sqrt{4+2\sqrt{3}} = \sqrt{3} + 1 = 2. \times \times \times$$

$$a = 2, b = \sqrt{3} - 1$$

$$\frac{a}{b} = \frac{2}{\sqrt{3}-1} = \frac{2(\sqrt{3}+1)}{2} = \sqrt{3} + 1$$

$$\therefore p = 1, q = 3$$

$$\therefore p + q = 4$$

15. 함수  $y = \sqrt{2x+2} + a$  의 그래프가 제 1, 3, 4 사분면을 지나도록 하는 정수  $a$  의 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

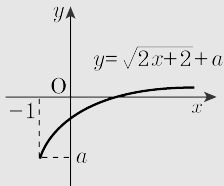
▷ 정답 : -2

해설

$$y = \sqrt{2x+2} + a = \sqrt{2(x+1)} + a$$

주어진 함수는  $y = \sqrt{2x}$  의 그래프를  $x$  축의 방향으로 -1 만큼,  $y$  축의 방향으로  $a$  만큼 평행이동한 것이다.

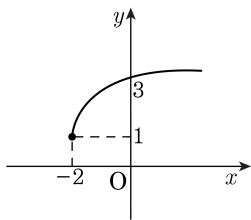
따라서 이 함수의 그래프가 제 1, 3, 4 사분면을 지나려면  $x = 0$  일 때,  $y < 0$  이어야 한다.



$$\sqrt{2} + a < 0 \text{ 이므로 } a < -\sqrt{2}$$

따라서 정수  $a$  의 최댓값은 -2이다.

16. 무리함수  $y = \sqrt{ax+b}+c$ 의 그래프가 다음 그림과 같을 때,  $a+b+c$ 의 값을 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : 7

해설

주어진 그래프는  $y = \sqrt{ax}$ 의 그래프를  $x$ 축으로  $-2$ 만큼,  $y$ 축으로  $1$ 만큼 평행이동한 것과 같으므로  $y = \sqrt{a(x+2)} + 1$   
또, 점  $(0, 3)$ 을 지나므로

$$3 = \sqrt{2a} + 1, \quad \sqrt{2a} = 2$$

$$\therefore a = 2$$

따라서  $y = \sqrt{2(x+2)} + 1 = \sqrt{2x+4} + 1$  이고,

이것이  $y = \sqrt{ax+b}+c$ 와 일치하므로

$$a = 2, \quad b = 4, \quad c = 1$$

$$\therefore a + b + c = 7$$

17.  $8 \leq x \leq a$  에서 함수  $y = -\sqrt{x+1} + 3$  의 최댓값이  $b$ , 최솟값이  $-1$  일 때,  $a+b$  의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 15

해설

$y = -\sqrt{x+1} + 3$  의 그래프는  $y = -\sqrt{x}$  의 그래프를  $x$  축의 방향으로  $-1$  만큼,  $y$  축의 방향으로  $3$  만큼 평행이동한 것이므로  $x$  의 값이 증가할 때,  $y$  의 값은 감소한다.

$x = a$  일 때 최솟값을 가지므로

$$-1 = -\sqrt{a+1} + 3 \quad \therefore a = 15$$

$x = 8$  일 때 최댓값을 가지므로

$$b = -\sqrt{8+1} + 3 = 0$$

$$\therefore a + b = 15 + 0 = 15$$

18. 양의 실수 전체의 집합에서 정의된 두 함수  $f(x) = \frac{x}{1+x}$ ,  $g(x) = \sqrt{x}$ 에 대하여

$(f \circ g)(a) = \frac{1}{2}$  일 때,  $(g \circ f)(4a)$ 의 값은? (단,  $a > 0$ )

- ①  $\frac{\sqrt{5}}{5}$     ②  $\frac{2\sqrt{5}}{5}$     ③  $\frac{3\sqrt{5}}{5}$     ④  $\frac{4\sqrt{5}}{5}$     ⑤  $\frac{6\sqrt{5}}{5}$

해설

$$(f \circ g)(a) = f(g(a)) = f(\sqrt{a}) = \frac{\sqrt{a}}{1 + \sqrt{a}} \text{ 이므로}$$

$$\frac{\sqrt{a}}{1 + \sqrt{a}} = \frac{1}{2}, \quad 2\sqrt{a} = 1 + \sqrt{a}$$

$$\sqrt{a} = 1 \quad \therefore a = 1$$

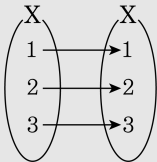
$$\begin{aligned} \therefore (g \circ f)(4a) &= (g \circ f)(4) = g(f(4)) = g\left(\frac{4}{5}\right) \\ &= \sqrt{\frac{4}{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5} \end{aligned}$$

19. 집합  $X = \{1, 2, 3\}$  에 대하여 함수  $f : X \rightarrow X$  가 일대일 대응이고,  $f \circ f = f$  를 만족하는 함수는 모두 몇 개인가?

- ① 1 개      ② 2 개      ③ 3 개      ④ 4 개      ⑤ 5 개

해설

함수  $f : X \rightarrow X$  가 일대일 대응이 되는 경우는 6 가지이고 이 중에서  $f \circ f = f$   
즉  $f = I$  (항등함수)를 만족하는 것은 하나 뿐이다.



20. 함수  $f(x) = x^2 - 4x + 6 (x \geq 2)$  의 역함수를  $g(x)$  라고 할 때,  $y = f(x)$  와  $y = g(x)$  의 그래프의 두 교점 사이의 거리를 구하면?

①  $-1$

②  $-\sqrt{2}$

③  $1$

④  $\sqrt{2}$

⑤  $2$

### 해설

함수  $y = f(x)$  와  $y = g(x)$  의 그래프는 직선  $y = x$  에 대하여 대칭이므로 두 함수의 그래프의 교점은  $y = f(x)$  의 그래프와 직선  $y = x$  의 그래프의 교점과 같다.

$y = x^2 - 4x + 6$  과  $y = x$  를 연립하면

$$x^2 - 5x + 6 = 0, (x - 2)(x - 3) = 0$$

$$\therefore x = 2 \text{ 또는 } x = 3$$

$$\therefore x = 2, y = 2 \text{ 또는 } x = 3, y = 3$$

즉, 두 교점은 점  $(2, 2)$ ,  $(3, 3)$  이다.

따라서, 구하는 두 교점 사이의 거리는

$$\sqrt{(3-2)^2 + (3-2)^2} = \sqrt{2}$$

21. 함수  $y = a|x+1| - b|x-1| + 2$  의 그래프가  $y$ 축에 대하여 대칭이기 위한 필요충분조건을 구하면?

①  $a + b = 0$

②  $a - b = 0$

③  $a + b = 1$

④  $a - b = 1$

⑤  $a + b = 2$

### 해설

$y = f(x)$ 의 그래프가  $y$ 축에 대하여 대칭이면  $f(x) = f(-x)$ 이다.

$f(x) = a|x+1| - b|x-1| + 2$  라 하면

$$f(-x) = a|-x+1| - b|-x-1| + 2$$

$$= -b|x+1| + a|x-1| + 2$$

$$f(x) = f(-x) \text{ 에서 } a = -b$$

$$\therefore a + b = 0$$

22. 집합  $X = \{-1, 0, 1\}$  에서  $X$  로의 함수 중 그 그래프가 원점에 대하여 대칭인 함수를  $f$  라 한다. <보기> 중 옳은 것을 모두 고르면?

보기

- ㉠  $X$  의 모든 원소  $x$  에 대하여  $f(-x) = f(x)$  이다.  
㉡ 함수  $f$  의 개수는 3개이다.  
㉢ 함수  $f$  는 역함수를 갖는다.

① ㉠

② ㉡

③ ㉢

④ ㉠, ㉡

⑤ ㉡, ㉢

해설

㉠ 원점에 대하여 대칭이므로

$f(-x) = -f(x)$  이다.  $\therefore$  거짓

㉡ i)  $f(-1) = 1, f(0) = 0, f(1) = -1$

ii)  $f(-1) = 0, f(0) = 0, f(1) = 0$

iii)  $f(-1) = -1, f(0) = 0, f(1) = 1$ 로 3개이다.

$\therefore$  참

㉢ 위 ㉡에서 ii)는 일대일대응이 아니므로  
역함수를 갖지 않는다.  $\therefore$  거짓

**23.** 전 구간을 일정한 속도 60 km/h 로 달리도록 되어 있는 어느 고속도로에서 하행하던 고속버스가 5 분 동안에 상행하는 같은 회사 소속의 고속버스 20 대를 보았다. 이 고속버스의 배차 간격이 일정할 때, 100 km 의 상행선에는 약 몇 대의 고속버스가 달리고 있는가?

① 50 대

② 100 대

③ 120 대

④ 150 대

⑤ 200 대

해설

각 방향으로 시속 60 km로 달리고 있으므로 어느 한 방향에 대한 다른 방향의 상대 속도는 시속 120 km이다.

이때, 5분 동안의 주행 거리는  $120 \times \frac{5}{60} = 120 \times \frac{1}{12} = 10(\text{km})$  이고, 이 사이를 달리는 동안에 20 대의 버스를 보았으므로 100 km 의 구간에는 200대가 있다.

24. 분수함수  $y = \frac{x-4}{x-1}$  의 정의역이  $\{x \mid -2 \leq x \leq 0\}$  일 때, 다음 중 치역을 바르게 구한 것은?

①  $\{y \mid -2 \leq y \leq 0\}$

②  $\{y \mid -2 \leq y \leq 2\}$

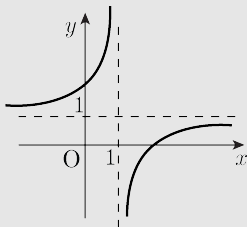
③  $\{y \mid -2 \leq y \leq 4\}$

④  $\{y \mid 0 \leq y \leq 2\}$

⑤  $\{y \mid 2 \leq y \leq 4\}$

해설

$$y = \frac{x-4}{x-1} = \frac{(x-1)-3}{x-1} = 1 + \frac{-3}{x-1}$$



$x = -2$  일 때,  $y = \frac{-2-4}{-2-1} = 2$  이고,

$x = 0$  일 때,  $y = \frac{-4}{-1} = 4$  이므로,

치역은  $\{y \mid 2 \leq y \leq 4\}$

25.  $0 \leq x \leq 2$  일 때, 함수  $y = \frac{2x-4}{x-4}$  의 최댓값을  $M$ , 최솟값을  $m$  이라 한다.  $Mm$ 의 값은?

① -2

② -1

③ 0

④ 1

⑤ 2

해설

$$y = \frac{2x-4}{x-4} = \frac{4}{x-4} + 2$$

$$x=0 \text{ 일 때 최대이므로, } M = \frac{4}{0-4} + 2 = 1$$

$$x=2 \text{ 일 때 최소이므로, } m = \frac{4}{2-4} + 2 = 0$$

$$\therefore Mm = 1 \times 0 = 0$$

26.  $x = \sqrt{3 - \sqrt{8}}$  일 때  $\frac{x^3 + x^2 - 3x + 6}{x^4 + 2x^3 + 2x + 9}$  의 값은?

① 1

② 2

③  $\frac{1}{2}$

④  $\frac{1}{4}$

⑤  $\frac{1}{3}$

해설

$$x = \sqrt{3 - \sqrt{8}} = \sqrt{3 - 2\sqrt{2}} = \sqrt{2} - 1 \text{ 에서}$$

$$x + 1 = \sqrt{2} \rightarrow x^2 + 2x - 1 = 0$$

$$\text{분자 : } x^3 + x^2 - 3x + 6$$

$$= (x^2 + 2x - 1)(x - 1) + 5 = 5$$

$$\text{분모 : } x^4 + 2x^3 + 2x + 9$$

$$= (x^2 + 2x - 1)(x^2 + 1) + 10 = 10$$

$$\therefore \text{준식} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$$

27. 삼차함수  $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$  에 대하여  $g(x) = (x+1)f(x) - 24x$  로 정의 한다.

$g(0) = g(1) = g(2) = g(3) = 0$  일 때,  $f(4)$  의 값은 ?

① 20

② 22

③ 24

④ 26

⑤ 28

해설

$g(0) = g(1) = g(2) = g(3) = 0$  이므로

$g(x) = x(x-1)(x-2)(x-3)$  이 된다.

즉,  $(x+1)f(x) - 24x = x(x-1)(x-2)(x-3)$

이 식에  $x = 4$  를 대입하면

$$5f(4) - 24 \cdot 4 = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

$$\therefore f(4) = 24$$

28. 집합  $A = \{1, 2, 3\}$ 에 대하여  $A$ 에서  $A$ 로의 두 함수  $f, g$ 가 일대일 대응이고  $f(2) = 1, g(3) = 3, (f \circ g)(1) = 2$ 일 때,  $(g \circ f)(1) + (g \circ f)(3)$ 의 값은?

① 2

② 3

③ 4

④ 5

⑤ 6

해설

$g(3) = 3$ 이고 함수  $g$ 는 일대일 대응이므로  $g(1) = 1$  또는  $g(1) = 2$ 이다.

만약  $g(1) = 2$  라고 가정하면

$(f \circ g)(1) = f(g(1)) = f(2) = 2$  이다.

그러나 문제의 조건에서  $f(2) = 1$  이므로 모순이다.

따라서  $g(1) = 1$  이다.

$(f \circ g)(1) = f(g(1)) = f(1)$  이고

$(f \circ g)(1) = 2$  이므로  $f(1) = 2$  이다.

$f(1) = 2, f(2) = 1$  이므로  $f(3) = 3$  이다.

$g(1) = 1, g(3) = 3$  이므로  $g(2) = 2$  이다.

$$\begin{aligned}\therefore (g \circ f)(1) + (g \circ f)(3) &= g(f(1)) + g(f(3)) \\ &= g(2) + g(3) \\ &= 2 + 3 = 5\end{aligned}$$

29. 함수  $f(x) = 2x+5$ 에 대하여  $f^2 = f \circ f$ ,  $f^3 = f^2 \circ f$ ,  $\dots$ ,  $f^{n+1} = f^n \circ f$ 라 정의하자. 이 때,  $f^n(x)$ 를 추정하고  $1+2+2^2+2^3+\dots+2^n = 2^{n+1}-1$ 임을 이용하여  $f^7(5)$ 의 값을 구하여라

▶ 답 :

▶ 정답 : 1275

해설

$$f^2(x) = f(f(x)) = f(2x+5) = 2(2x+5) + 5 = 2^2x + 2 \cdot 5 + 5$$

$$\begin{aligned} f^3(x) &= f(f^2(x)) = f(2^2x + 2 \cdot 5 + 5) = 2(2^2x + 2 \cdot 5 + 5) + 5 \\ &= 2^3x + 2^2 \cdot 5 + 2 \cdot 5 + 5 \end{aligned}$$

이와 같이 계속하면 다음과 같이 추정할 수 있다.

$$f^n(x) = 2^n x + 2^{n-1} \cdot 5 + 2^{n-2} \cdot 5 + \dots + 2 \cdot 5 + 5 = 2^n x + (5 \cdot 2^n - 1)$$

$$\therefore f^7(5) = 5(2^7 + 2^6 + \dots + 2 + 1) = 5(2^8 - 1) = 1275$$