

1. $x + \frac{1}{x} = 1$ 일때, $x^5 + \frac{1}{x^5}$ 의 값은?

- ① 1 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 7

해설

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2 = 1 - 2 = -1$$

$$x^3 + \frac{1}{x^3} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^3 - 3\left(x + \frac{1}{x}\right) = 1 - 3 = -2$$

$$\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)\left(x^3 + \frac{1}{x^3}\right) = x^5 + \frac{1}{x^5} + x + \frac{1}{x}$$

$$(-1) \times (-2) = x^5 + \frac{1}{x^5} + 1$$

$$\therefore x^5 + \frac{1}{x^5} = 1$$

해설

$x + \frac{1}{x} = 1$ 의 양변에 x 를 곱하면

$$x^2 - x + 1 = 0, (x + 1)(x^2 - x + 1) = 0,$$

$$x^3 + 1 = 0, x^3 = -1, \frac{1}{x^3} = -1$$

$$x^5 + \frac{1}{x^5} = -x^2 - \frac{1}{x^2} = -\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)$$

$$= -(-1) = 1$$

2. $a - b = 1$ 이고, $a^2 + b^2 = -1$ 일 때, $a^{14} + b^{20}$ 의 값을 구하면?

- ① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$b = a - 1$ 을 $a^2 + b^2 = -1$ 에 대입하면
 $a^2 - a + 1 = 0$ 에서 $a^3 = -1$
 $a = b + 1$ 을 $a^2 + b^2 = -1$ 에 대입하면
 $b^2 + b + 1 = 0$ 에서 $b^3 = 1$
 $a^{14} + b^{20} = (a^3)^4 \times a^2 + (b^3)^6 \times b^2$
 $\qquad\qquad = a^2 + b^2 = -1$

3. $a + b = 4$, $a^2 + b^2 = 10$ 일 때, $a^5 + b^5$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 244

해설

$$a + b = 4, a^2 + b^2 = 10$$

$$ab = \frac{1}{2}((a + b)^2 - (a^2 + b^2)) = 3$$

$$a^3 + b^3 = (a + b)^3 - 3ab(a + b) = 28$$

$$\begin{aligned}\therefore a^5 + b^5 &= (a^3 + b^3)(a^2 + b^2) - a^2b^2(a + b) \\ &= 28 \times 10 - 9 \times 4 \\ &= 244\end{aligned}$$