

1. $X = \{-1, 0, 1\}$, $Y = \{0, 1, 2, 3\}$ 이라 한다. X 의 임의의 원소 x 에 대하여 다음과 같은 X 에서 Y 로의 대응을 생각할 때, 이 중 X 에서 Y 로의 함수인 것은?

① $x \rightarrow x + 3$

② $x \rightarrow x^2 - 1$

③ $\begin{cases} x \geq 0 \text{ 일 때 } x \rightarrow 1 \\ x < 0 \text{ 일 때 } x \rightarrow 0 \end{cases}$

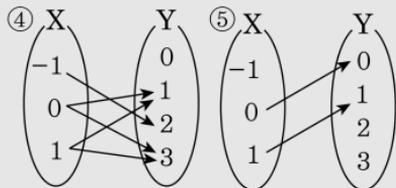
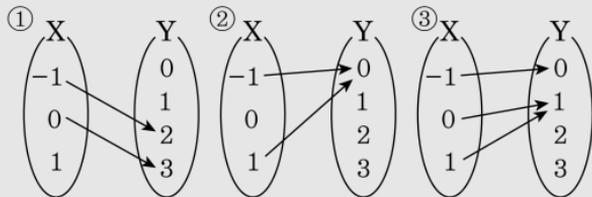
④ $\begin{cases} x \geq 0 \text{ 일 때 } x \rightarrow \text{홀수} \\ x < 0 \text{ 일 때 } x \rightarrow 2 \end{cases}$

⑤ $x \rightarrow x^3$

해설

X 에서 Y 로의 함수가 되려면 X 의 원소가 빠짐없이 Y 의 원소 하나에 대응해야 한다.

순서대로 대응도를 만들어 보면 다음과 같다.



①, ②, ⑤는 Y 의 원소에 대응하지 않는 X 의 원소가 존재하므로 함수가 될 수 없고 ④는 X 의 원소 하나가 Y 의 원소 두 개에 대응하는 경우가 생기므로 역시 함수가 될 수 없다.

2. 자연수 전체의 집합 N 에 대하여 함수 $f : N \rightarrow N$ 을 $f(n) = (n$ 의 양의 약수의 개수)로 정의한다. 이 때, 집합 $A = \{n | f(n) = 2\}$ 에 대하여 다음 중 옳은 것은 무엇인가?

- ① $1 \in A$ ② $2 \in A$ ③ $4 \in A$
④ $6 \in A$ ⑤ $10 \in A$

해설

$f(n) = 2$ 란 소수를 말함. 따라서 정답은 ②

3. 실수전체의 집합에서 정의된 두 함수 f, g 에 대하여 f 는 항등함수이고 $g(x) = -3$ (x 는 실수) 일 때, $f(2) + g(4)$ 의 값은?

① -1

② 1

③ 2

④ 3

⑤ 4

해설

f 는 항등함수이므로 $f(x) = x$

$$\therefore f(2) = 2$$

모든 실수 x 에 대하여

$g(x) = -3$ 이므로 g 는 상수함수이다.

$$\therefore g(4) = -3$$

$$\therefore f(2) + g(4) = 2 + (-3) = -1 \text{ 이다.}$$

4. 두 집합 $X = \{-2, -1, 0, 1\}$, $Y = \{1, 2, 3\}$ 에 대하여 X 에서 Y 로의 상수함수의 개수를 구하면?

① 1

② 2

③ 3

④ 4

⑤ 5

해설

두 집합 $X = \{-2, -1, 0, 1\}$, $Y = \{1, 2, 3\}$ 에 대하여 X 에서 Y 로의 상수함수는

$f(x) = 1, f(x) = 2, f(x) = 3$ 의 3 개가 있다.

5. 실수 전체의 집합 R 에서 R 로의 세 함수 f, g, h 에 대하여 $(h \circ g)(x) = 3x + 4$, $f(x) = x^2$ 일 때, $(h \circ (g \circ f))(2)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 16

해설

$$\begin{aligned}(h \circ (g \circ f))(2) &= ((h \circ g) \circ f)(2) \\ &= (h \circ g)(f(2)) \\ &= (h \circ g)(4) \\ &= 3 \times 4 + 4 = 16\end{aligned}$$

6. 함수 $f(x) = 2x + 6$, $g(x) = ax - 1$ 에 대하여 $f \circ g = g \circ f$ 일 때, a 의 값은?

① $\frac{1}{6}$

② $\frac{5}{6}$

③ 1

④ 2

⑤ 6

해설

$$\begin{aligned}(f \circ g)(x) &= 2g(x) + 6 = 2(ax - 1) + 6 \\ &= 2ax + 4 \cdots \textcircled{\text{㉠}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(g \circ f)(x) &= af(x) - 1 = a(2x + 6) - 1 \\ &= 2ax + 6a - 1 \cdots \textcircled{\text{㉡}}\end{aligned}$$

$\textcircled{\text{㉠}}, \textcircled{\text{㉡}}$ 에서 $2ax + 4 = 2ax + 6a - 1$

$$4 = 6a - 1$$

$$\therefore a = \frac{5}{6}$$

7. $X = \{x \mid -2 \leq x \leq 2\}$, $Y = \{y \mid -3 \leq y \leq 3\}$ 에서 $f : X \rightarrow Y$, $f(x) = ax + b$ (단, $a > 0$) 로 정의되는 함수 f 가 일대일 대응이 되도록 a , b 의 값을 정하면?

- ① $a = \frac{3}{2}$, $b = 0$ ② $a = \frac{1}{2}$, $b = 0$ ③ $a = \frac{3}{2}$, $b = 1$
④ $a = \frac{5}{2}$, $b = 0$ ⑤ $a = 2$, $b = 0$

해설

f 가 일대일 대응이고 $a > 0$ 이므로

$$\begin{cases} f(-2) = -2a + b = -3 \\ f(2) = 2a + b = 3 \end{cases}$$

$$\therefore a = \frac{3}{2}, b = 0$$

8. 두 함수 $f(x) = x^2$, $g(x) = x + 2$ 에 대하여 $(f \circ g)(x)$ 를 구하면?

① $(f \circ g)(x) = (x + 2)^2$

② $(f \circ g)(x) = x^2 + 2$

③ $(f \circ g)(x) = (x - 2)^2$

④ $(f \circ g)(x) = x^2 - 2$

⑤ $(f \circ g)(x) = -x^2 + 2$

해설

두 함수 $f(x) = x^2$, $g(x) = x + 2$ 에 대하여

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x + 2) = (x + 2)^2$$

9. 두 함수 $f(x) = -x + a$, $g(x) = ax + b$ 에 대하여 $(f \circ g)(x) = 2x - 4$ 일 때, ab 의 값은 얼마인가?

① -2

② -3

③ -4

④ -5

⑤ -6

해설

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(ax + b)$$

$$= -(ax + b) + a = -ax + a - b \text{ 이므로 } -ax + a - b = 2x - 4$$

그런데, 이것은 x 에 대한 항등식이므로

$$a = -2, b = 2$$

$$\therefore ab = -4$$

10. 두 함수 $f(x) = 3x + 1$, $g(x) = 4x + a$ 에 대하여 $(g \circ f)(x) = 12x + 7$ 이 성립할 때, 상수 a 의 값은?

① -3

② -1

③ 1

④ 3

⑤ 5

해설

$f(x) = 3x + 1$, $g(x) = 4x + a$ 이므로

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(3x + 1)$$

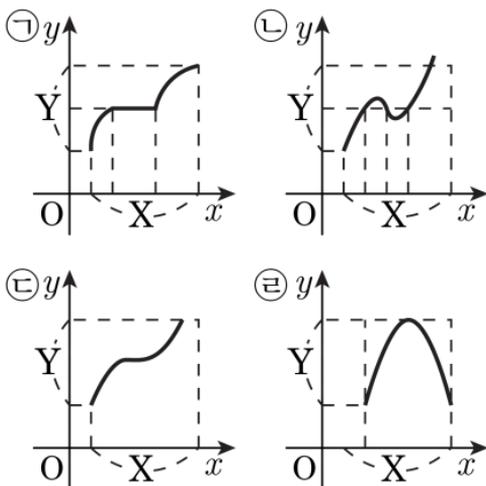
$$= 4(3x + 1) + a$$

$$= 12x + 4 + a$$

따라서 $12x + 4 + a = 12x + 7$ 에서 $4 + a = 7$

$$\therefore a = 3$$

11. 함수 $f: X \rightarrow Y$ 의 그래프가 다음과 같다고 한다. 이 중에서 역함수가 존재하는 것은?



① (㉠) (㉢)

② (㉡) (㉣)

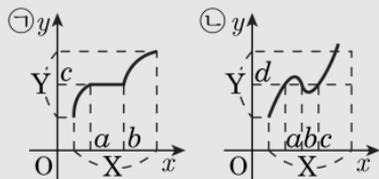
③ (㉢)

④ (㉠)

⑤ (㉠) (㉡) (㉣)

해설

X 에서 Y 로의 일대일 대응을 찾으면 된다.



㉠ $\{x|a \leq x \leq b\}$ 에 속하는 x 의 상이 모두 c 이므로 일대일 대응이 아니다.

㉡ a, b, c 의 상이 모두 d 이므로 일대일 대응이 아니다.

㉢, ㉣의 경우와 같다.

12. 두 집합 $X = \{-1, 0, 1\}$, $Y = \{a, b, c, d\}$ 에 대하여 집합 X 에서 집합 Y 로의 함수 $f : X \rightarrow Y$ 의 개수는?

① 12 개

② 27 개

③ 36 개

④ 64 개

⑤ 81 개

해설

집합 X 의 원소 $-1, 0, 1$ 에 대응될 수 있는
집합 Y 의 원소가 각각 4 개씩이므로
 $4 \times 4 \times 4 = 64(\text{개})$

13. 두 집합 $X = \{1, 2, 3\}$, $Y = \{a, b, c, d\}$ 에 대하여 X 에서 Y 로 대응되는 함수의 개수를 a , 일대일 대응의 개수를 b 라 할 때, $a+b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: $a + b = 64$

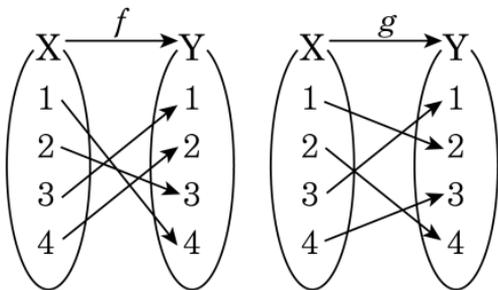
해설

정의역과 공역의 개수가 다르므로
일대일 대응은 없고, 정의역의 개수가 A
공역의 개수가 B 일 때 함수 개수는 B^A 이다.

$$\therefore 4^3 = 64$$

$$\therefore a + b = 64$$

14. 두 함수 f, g 가 아래 그림과 같이 정의될 때, $g = h \cdot f$ 를 만족시키는 함수 h 에 대하여 $h(2)$ 의 값은?



① 1

② 2

③ 3

④ 4

⑤ 5

해설

$g = h \cdot f$ 이고 함수 f 는 일대일대응이므로 역함수가 존재한다.

$$\begin{aligned} &\therefore g \cdot f^{-1} \\ &= (h \cdot f) \cdot f^{-1} = h \cdot (f \cdot f^{-1}) \\ &= h \cdot I = h \\ &\therefore h(2) = (g \cdot f^{-1})(2) \\ &= g(f^{-1}(2)) \\ &= g(4) (\because f^{-1}(2) = 4) \\ &\therefore g(4) = 3 \end{aligned}$$

15. 실수 전체의 집합 R 에서 R 로의 함수 f 가 $f : x \rightarrow x + 1$ 로 주어질 때, $f^{2006}(2)$ 의 값은 얼마인가? (단, $f^1 = f$, $f^{n+1} = f \circ f^n$, n 은 자연수)

① 2002

② 2004

③ 2006

④ 2008

⑤ 2010

해설

$$f^2(x) = f(f(x)) = (x + 1) + 1 = x + 2$$

$$f^3(x) = f(f^2(x)) = (x + 2) + 1 = x + 3$$

$$f^4(x) = f(f^3(x)) = (x + 3) + 1 = x + 4$$

⋮

이상에서 $f^n(x) = x + n$ 이므로

$$f^{2006}(x) = x + 2006$$

$$\therefore f^{2006}(2) = 2 + 2006 = 2008$$

16. $X = \{-1, 0, 1\}$, $Y = \{0, 1, 2, 3\}$ 일 때, $x \in X$ 인 임의의 x 에 대한 다음의 대응 중에서 함수가 아닌 것은?

① $x \rightarrow 1$

② $x \rightarrow |x|$

③ $x \rightarrow x^2 + 1$

④ $x \rightarrow 2x$

⑤ $x \rightarrow x^2 + x + 1$

해설

④ $f(-1) = -2$ 이므로 함숫값이 공역에 존재하지 않으므로 함수가 아니다.

17. 집합 $X = \{-1, 0, 1, 2\}$ 에 대하여 함수 $f : X \rightarrow X$ 를 $f(x) = |x|$ 라 하자. 이때 함수 f 의 치역의 부분집합의 개수는?

① 2개

② 4개

③ 6개

④ 8개

⑤ 16개

해설

$f(-1) = f(1) = 1, f(0) = 0, f(2) = 2$ 이므로 함수 f 의 치역은 $\{0, 1, 2\}$ 이다.

원소의 개수가 3인 집합의 부분집합은 $2^3 = 8$ (개)이다.

18. 집합 $X = \{1, 2\}$ 를 정의역으로 하는 두 함수 $f(x) = ax - 3$, $g(x) = 2x + b$ 에 대하여 $f = g$ 가 되도록 하는 상수 a, b 에 대하여 $a - b$ 의 값을 구하면?

① -3

② -1

③ 1

④ 3

⑤ 5

해설

$$f(1) = g(1) \text{ 에서 } a - 3 = 2 + b$$

$$\therefore a - b = 5 \cdots \text{㉠}$$

$$f(2) = g(2) \text{ 에서 } 2a - 3 = 4 + b$$

$$\therefore 2a - b = 7 \cdots \text{㉡}$$

$$\text{㉠, ㉡ 에서 } a = 2, b = -3$$

$$\therefore a - b = 2 - (-3) = 5$$

19. 두 함수 $f(x) = 3x + 1$, $g(x) = -x^2 + x$ 에 대하여 $(f \circ g)(2)$, $(g \circ f)(2)$ 의 함숫값을 각각 a , b 라 할 때, $a - b$ 의 값을 구하면?

① -47

② -35

③ 12

④ 37

⑤ 47

해설

$$a = (f \circ g)(2) = f(g(2)) = f(-2) = -5$$

$$b = (g \circ f)(2) = g(f(2)) = g(7) = -42$$

$$\therefore a - b = -5 - (-42) = 37$$

20. 두 함수 $f(x)$, $g(x)$ 가

$$f(x) = \begin{cases} 0 & (x \text{는 유리수}) \\ \sqrt{2} & (x \text{는 무리수}) \end{cases}, g(x) = \begin{cases} 1 & (x \text{는 유리수}) \\ \sqrt{3} & (x \text{는 무리수}) \end{cases} \text{일 때, } (g \circ$$

$f)(\pi)$ 의 값은 얼마인가?.

① 0

② $\sqrt{2}$

③ $\sqrt{3}$

④ 1

⑤ $\sqrt{2} + \sqrt{3}$

해설

$$(g \circ f)(\pi) = g(f(\pi)) = g(\sqrt{2}) = \sqrt{3}$$

21. 1보다 큰 자연수 x 에 대하여 $f(x) = \frac{x - \frac{1}{x}}{1 - \frac{1}{x}}$ 로 정의 할 때, $f(25)$ 의

값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 26

해설

$$f(x) = \frac{x - \frac{1}{x}}{1 - \frac{1}{x}} = \frac{\frac{x^2 - 1}{x}}{\frac{x - 1}{x}} = x + 1$$

$$\therefore f(25) = 26$$

22. 정의역이 $X = \{-1, 1\}$ 일 때 항등함수가 될 수 없는 것을 고르면?

- ① $f(x) = x$ ② $f(x) = x^2$ ③ $f(x) = \frac{1}{x}$
④ $f(x) = x^3$ ⑤ $f(x) = x|x|$

해설

$f(a) = a$ 가 항등함수의 정의이므로

①, ③, ④, ⑤ : $f(-1) = -1, f(1) = 1$

② : $f(-1) = f(1) = 1$ 이므로

②는 항등함수가 될 수 없음

23. 함수 $f(x)$ 가 $f(2x+1) = 3x+2$ 를 만족할 때, $f(3)$ 의 값을 구하면?

① 1

② 2

③ 3

④ 4

⑤ 5

해설

$f(2x+1) = 3x+2$ 에서 $2x+1 = 3$ 이므로

$x = 1$ 을 대입하면

$$f(2 \cdot 1 + 1) = f(3) = 3 \cdot 1 + 2 = 5$$

24. 두 집합 $X = \{1, 2, 3\}$, $Y = \{5, 6, 7\}$ 에 대하여 X 에서 Y 로의 함수의 개수를 a , 일대일 대응의 개수를 b 라고 할 때, $a + b$ 의 값은?

① 27

② 30

③ 33

④ 36

⑤ 39

해설

집합 X 에서 Y 로의 함수의 개수는

$$a = 3 \times 3 \times 3 = 27$$

집합 X 에서 Y 로의 일대일 대응의 개수는

$$b = 3 \times 2 \times 1 = 6$$

$$\therefore a + b = 27 + 6 = 33$$

25. $f : X \rightarrow Y$ 가 상수함수이고, $f(100) = 100$ 일 때, $f(2006) = a$ 이다.
 $a + 100$ 의 값은?

① 0

② 100

③ 200

④ 300

⑤ 400

해설

상수함수에 정의에 의해 $f(x) = 100$

$\therefore f(2006) = 100 = a$

따라서 $a + 100 = 200$