1. 연립부등식 $\begin{cases} 3(x-2) > 5x+2 \\ -2(x+7) \le 3x+21 \end{cases}$ 을 만족하는 해 중에서 가장 작은 정수와 가장 큰 정수의 합을 구하여라.

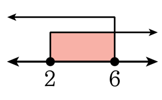
▶ 답 :

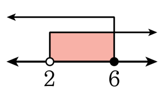
▷ 정답 : -12

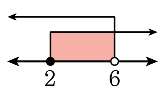
해설

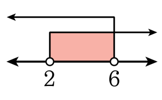
$3x-6 > 5x+2$, $x < -4$ 이고 $-2x-14 \le 3x+21$, $5x \ge -35$, $x \ge -7$ 이므로 $-7 \le x < -4$ 이다.
따라서 가장 작은 정수는 -7 이고 가장 큰 정수는 -5 이므로 -12 이다.

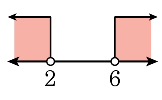
2. 다음 부등식 $1-4x<7-5x<x-5$ 을 수직선 위에 나타냈을 때, 바르게 나타낸 것은?

①


②


③


④


⑤


해설

$1-4x<7-5x,\quad x<6$

$7-5x<x-5,\quad x>2$

$\therefore\ 2<x<6$

3. $3\overline{\mathrm{PA}} = 2\overline{\mathrm{PB}}$가 되도록 하는 선분 AB 위의 점 P에 대하여 A$(-3, 2)$이고, P$(1, 0)$일 때, 점 B의 x좌표와 y좌표의 합은?

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

해설

$3\overline{\mathrm{PA}} = 2\overline{\mathrm{PB}}$이므로
$\overline{\mathrm{PA}} : \overline{\mathrm{PB}} = 2 : 3$이고,
점 P가 선분 AB 위의 점이므로
점 P는 선분 AB를 $2 : 3$으로 내분하는 점이다.
이 때, 점 B의 좌표를 B(a, b)라 하면

$$\left(\frac{2\times a + 3\times(-3)}{2+3}, \frac{2\times b + 3\times 2}{2+3}\right) = (1, 0)$$

$$\frac{2a-9}{5} = 1, \frac{2b+6}{5} = 0$$

$\therefore\ a = 7, b = -3$

$\therefore\ a + b = 4$

4. $(4x^2-3x+1)^5(x^3-2x^2-1)^4$ 을 전개했을 때, 계수들의 총합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 512

해설

$(4x^2-3x+1)^5(x^3-2x^2-1)^4 = ax^{22}+bx^{21}+\cdots+c$
위의 식에 $x=1$ 을 대입하면, 모든 계수들의 총합이 나온다.
$\therefore$ (계수의 총합) $=2^5\times(-2)^4=512$

5. 임의의 실수 a, b에 대하여 연산 $\triangle$를 $a\triangle b = a^2 - ab + b^2$라 할 때, $(x^2\triangle x) + (2x\triangle x) - (x\triangle 1) - 3$을 인수분해하면?

① $(x-1)(x+1)(x^2-x+4)$　② $(x-2)(x+1)(x^2-x+4)$

③ $(x-1)(x+2)(x^2-x+2)$　④ $(x-1)(x+1)(x+2)^2$

⑤ $(x-2)(x+1)(x+2)^2$

해설

$x^2\triangle x = x^4 - x^3 + x^2$

$2x\triangle x = 4x^2 - 2x^2 + x^2 = 3x^2$

$x\triangle 1 = x^2 - x + 1$이므로

준 식 $= x^4 - x^3 + x^2 + 3x^2 - x^2 + x - 1 - 3$

$= x^4 - x^3 + 3x^2 + x - 4$

$= (x-1)(x+1)(x^2-x+4)$

6. 길이가 30m 인 철사를 구부려서 부채꼴 모양을 만들려고 한다. 부채꼴의 넓이가 최대가 되도록 하는 부채꼴의 반지름의 길이를 구하면?

① $\frac{15}{2}$m ② 8m ③ $\frac{17}{2}$m ④ 3m ⑤ 5m

해설

부채꼴의 넓이를 $y\,\mathrm{m}^2$, 반지름의 길이를 $x\,\mathrm{m}$ 라 하면
$y = \frac{1}{2} \times x \times (30 - 2x)$ 이다.

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{2} \times x \times (30 - 2x) \\ &= x(15 - x) \\ &= -x^2 + 15x \\ &= -\left(x^2 - 15x + \frac{225}{4} - \frac{225}{4}\right) \\ &= -\left(x - \frac{15}{2}\right)^2 + \frac{225}{4} \end{aligned}$$

이차함수는 위로 볼록이므로 꼭짓점이 최댓값을 나타낸다.
따라서 꼭짓점이 $\left(\frac{15}{2}, \frac{225}{4}\right)$ 이므로 반지름의 길이가 $\frac{15}{2}$ m 일 때, 부채꼴의 넓이가 최댓값 $\frac{225}{4}\,\mathrm{m}^2$ 을 가진다.

7. 평면위의 두 점 $\mathrm{A}(m^2, -m)$, $\mathrm{B}(1, m)$ 일 때, 두 점 사이의 거리 $\overline{\mathrm{AB}}$ 는?

① m^2 ② m^2+1 ③ m^2+2

④ m^2+3 ⑤ m^2+4

해설

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{AB}} &= \sqrt{(1-m^2)^2+(m+m)^2} \\ &= \sqrt{m^4+2m^2+1} \\ &= \sqrt{(m^2+1)^2} = m^2+1\end{aligned}$$

8. 두 점 $\mathrm{A}(3,4), \mathrm{B}(6,2)$ 에서 같은 거리에 있는 x축 위의 점 P 의 좌표는?

① $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$ ② $\left(\frac{3}{2}, 0\right)$ ③ $\left(\frac{5}{2}, 0\right)$

④ $(4, 0)$ ⑤ $(5, 0)$

해설

x축 위의 점 P 의 좌표를 $(a, 0)$ 이라 하면
$\overline{\mathrm{AP}} = \sqrt{(a-3)^2 + (0-4)^2} = \sqrt{a^2 - 6a + 25}$
$\overline{\mathrm{BP}} = \sqrt{(a-6)^2 + (0-2)^2} = \sqrt{a^2 - 12a + 40}$
조건에서 $\overline{\mathrm{AP}} = \overline{\mathrm{BP}}$ 이므로
$\sqrt{a^2 - 6a + 25} = \sqrt{a^2 - 12a + 40}$
양변을 제곱하면 $a^2 - 6a + 25 = a^2 - 12a + 40$
$6a = 15, \quad \therefore a = \frac{5}{2}$
따라서 구하는 점 P 의 좌표는 $\left(\frac{5}{2}, 0\right)$

9. 직선 $y = 2x + k$ 를 원점에 대하여 대칭이동한 직선의 y 절편이 -3 일 때, 상수 k 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

직선 $y = 2x + k$ 를 원점에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은 $-y = -2x + k$, 즉 $y = 2x - k$
이 때, 이 직선의 y 절편이 -3 이 되어야 하므로
$-k = -3$
$\therefore k = 3$

10. 함수 $f(x) = x^3 - 2x^2 + ax + b$ 의 그래프와 $g(x) = 3x - 4$ 의 그래프가 서로 다른 세 점 (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) 에서 만난다고 한다. 이 때 $y_1 + y_2 + y_3$ 의 값은?

① -6 ② -5 ③ -4 ④ -3 ⑤ -2

해설

x_1, x_2, x_3 는 방정식 $x^3 - 2x^2 + ax + b = 3x - 4$
즉 $x^3 - 2x^2 + (a-3)x + b + 4 = 0$ 의 세 근 $x_1 + x_2 + x_3 = 2$
이 때, $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$ 는
직선 $y = 3x - 4$ 위의 점이므로
$y_1 = 3x_1 - 4, y_2 = 3x_2 - 4, y_3 = 3x_3 - 4$

$$\begin{aligned} \therefore y_1 + y_2 + y_3 &= 3(x_1 + x_2 + x_3) - 12 \\ &= 3 \cdot 2 - 12 \\ &= -6 \end{aligned}$$

11. 다음 중 삼차방정식 $(x-1)(x^2-2x)+(5-k)x+k-5=0$이 허근을 갖기 위한 k의 값이 될 수 <u>없는</u> 것은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 2 ⑤ 4

해설

$(x-1)(x^2-2x)+(5-k)x+k-5=0$에서 $x^3-3x^2+(7-k)x+k-5=0$

$x=1$일때 성립하므로 $x-1$을 인수로 가지고 여기에 조립제법을 이용하면

$(x-1)(x^2-2x+-k)=0$

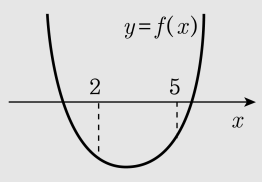
허근을 가지려면 $x^2-2x+5-k=0$의 판별식이 0보다 작아야 하므로 $D'=1-5+k<0$

$\therefore\ k<4$

12. 이차방정식 $x^2-7x+10=0$ 의 두 근이 이차방정식 $x^2-6x+k=0$ 의 두 근 사이에 있기 위한 정수 k 의 최댓값은?

① 4　　② 5　　③ 6　　④ 7　　⑤ 8

해설



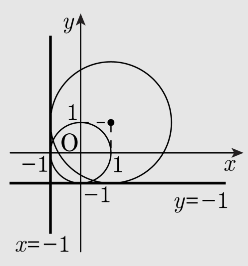
이차방정식 $x^2-7x+10=0$ 에서
$(x-2)(x-5)=0$ ∴ $x=2$ 또는 $x=5$
$f(x)=x^2-6x+k$ 로 놓으면 함수 $y=$
$f(x)$ 의
그래프는 다음 그림과 같아야 한다.
따라서 $f(2)<0$, $f(5)<0$ 이므로
$f(2)=-8+k<0$ 에서 $k<8$
$f(5)=-5+k<0$ 에서 $k<5$
∴ $k<5$ ∴ 정수 k 의 최댓값은 4 이다.

13. 두 원 $x^2+y^2=1$, $(x-1)^2+(y-1)^2=4$ 의 공통접선의 방정식을 구하면?

① $x=-2,\ y=-1$　② $x=1,\ y=1$
③ $x=-1,\ y=1$　④ $x=1,\ y=-1$
⑤ $x=-1,\ y=-1$

해설

그림을 그려보면 두 개의 공통접선이 존재하고 그 식은 각각
$x=-1,\ y=-1$



14. 방정식 $f(x,\ y)=0$이 나타내는 도형을 x축에 대하여 대칭이동시키는 것을 A, y축에 대하여 대칭 이동시키는 것을 B, 원점에 대하여 대칭 이동시키는 것을 C, 직선 $y=x$에 대하여 대칭 이동시키는 것을 D라 하자. 직선 $2x+y+1=0$ 을 $A \to B \to C \to D \to C \to B \to A$의 순서로 대칭 이동시킨 도형의 방정식은? (단, $A \to B$는 A에 의하여 대칭 이동시킨 후 다시 B에 의하여 대칭 이동시키는 것을 뜻한다.)

① $2x+y+1=0$　② $2x+y-1=0$　③ $x+2y-1=0$
④ $x+2y+1=0$　⑤ $x-2y-1=0$

해설

$2x+y+1=0$을 A(x축 대칭)하면 $2x-y+1=0$
B(y축 대칭)하면 $-2x-y+1=0$
C(원점 대칭)하면 $2x+y+1=0$이므로
$A \to B \to C$, $C \to B \to A$에 의하여 도형은 자기 자신으로 옮겨진다.
$2x+y+1=0$을 D(직선 $y=x$ 대칭)하면 $2y+x+1=0$
$\therefore x+2y+1=0$

15. $x^2+y^2-6x-4y+9=0$을 y축에 대하여 대칭이동시키면 직선 $y=mx$에 접한다고 한다. 이 때, 상수 m의 값들의 합을 구하면?

① $-\frac{12}{5}$　② $-\frac{7}{5}$　③ $\frac{1}{5}$　④ $\frac{3}{5}$　⑤ $\frac{6}{5}$

해설

$x^2+y^2-6x-4y+9=0$을 y축에 대하여 대칭이동시키면
$(-x)^2+y^2-6(-x)-4y+9=0$, $x^2+y^2+6x-4y+9=0$
$\therefore\ (x+3)^2+(y-2)^2=2^2 \cdots\cdots$ ㉠
이때, ㉠이 직선 $mx-y=0$에 접하므로 이 직선과 $(-3,2)$ 사이의 거리는 2이어야 한다.
즉, $\frac{|-3m-2|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=2$
$9m^2+12m+4=4m^2+4$
$\therefore\ 5m^2+12m=0$
따라서, $m=0$ 또는 $m=-\frac{12}{5}$이므로 그 합은 $0+\left(-\frac{12}{5}\right)=-\frac{12}{5}$

16. 다항식 $f(x)$는 다항식 $g(x)$로 나누어떨어진다. $f(x)$를 $g(x)$로 나눈 몫을 $Q(x)$라 하고, $Q(x)$를 $g(x)$로 나눈 몫과 나머지를 각각 $h(x), r(x)$라고 할 때, $f(x)$를 $\{g(x)\}^2$으로 나눈 몫과 나머지는?

① 몫 $Q(x)$, 나머지 $r(x)$

② 몫 $h(x)$, 나머지 $g(x)r(x)$

③ 몫 $Q(x)h(x)$, 나머지 $h(x)r(x)$

④ 몫 $h(x)$, 나머지 $r(x)$

⑤ 몫 $g(x)h(x)$, 나머지 $g(x)r(x)$

해설

$f(x) = g(x)Q(x) \cdots$ ㉠
$Q(x) = g(x)h(x) + r(x) \cdots$ ㉡
㉡을 ㉠에 대입하면
$f(x) = \{g(x)\}^2 h(x) + g(x)r(x)$

$r(x)$가 $g(x)$보다 낮은 차수이므로 $g(x)r(x)$는 $\{g(x)\}^2$보다 낮은 차수이다.
따라서, 나머지는 $g(x)r(x)$이고 몫은 $h(x)$이다.

17. x 에 관한 이차방정식 $x^2 - 2(p+2)x + 2p - 3q = 0$ 이 중근을 가질 때, q 의 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

$x^2 - 2(p+2)x + 2p - 3q = 0$ 이 중근을 가지므로

$$\frac{D}{4} = (p+2)^2 - 2p + 3q$$

$$= p^2 + 4p + 4 - 2p + 3q = 0$$

$$\therefore\ q = -\frac{1}{3}p^2 - \frac{2}{3}p - \frac{4}{3} = -\frac{1}{3}(p+1)^2 - 1$$

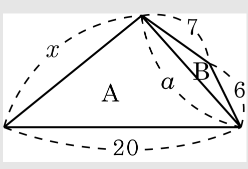
따라서 $p = -1$ 일 때, q 는 최댓값 -1 을 갖는다.

18. 길이가 각각 6, 7, 20, x 인 선분을 끝점끼리 이어 붙여 볼록한 사각형을 만들 수 있는 x 값의 범위를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $7 < x < 33$

해설



위의 그림과 같이 보조선을 그어 그 길이를 a 라 하자.
삼각형 B 에서 $a < 7 + 6$, 즉 $a < 13$
삼각형 A 에서
1) x 가 가장 긴 변인 경우 : $x < a + 20$
그런데 $a < 13$ 이므로 $x < a + 20 < 13 + 20$
$\therefore\ x < 33$
2) 20 이 가장 긴 변인 경우 : $20 < a + x$
그런데 $a < 13$ 이므로 $20 < a + x < 13 + x$
$\therefore\ x > 7$
따라서 1), 2) 에 의해서 $7 < x < 33$ 이다.

19. 가위로 어떤 볼록사각형의 대각선을 따라 잘랐더니 세 변의 길이가 각각 4, 5, y 인 삼각형 A 와 12, y, x 인 삼각형 B 가 만들어졌다. 삼각형 A 의 변의 길이 중 y 가 가장 길고, 삼각형 B 의 변의 길이 중 y 가 가장 짧을 때, x 값의 범위를 구하여라.

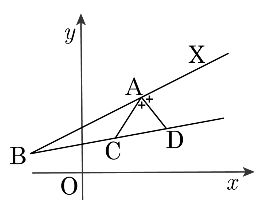
▶ 답：

▷ 정답： $3 < x < 21$

해설

삼각형 A 에서 $y < 4 + 5$, 즉 $y < 9$
삼각형 B 에서
1) x 가 가장 긴 변인 경우： $x < y + 12$
그런데 $y < 9$ 이므로 $x < y + 12 < 9 + 12$
$\therefore\ x < 21$
2) 12 가 가장 긴 변인 경우： $12 < x + y$
그런데 $y < 9$ 이므로 $12 < x + y < x + 9$
$\therefore\ x > 3$
따라서 1), 2) 에 의해서 $3 < x < 21$ 이다.

20. 다음 좌표평면에서 세 점 A(7, 6), B(−5, 1), C(3, 3) 을 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC가 있다. 그림과 같이 변 BA의 연장선 위에 한 점 X 를 잡고, ∠XAC의 이등분선이 변 BC의 연장선과 만나는 교점을 D(x, y) 라 할 때, $x+4y$ 의 값을 구하면?

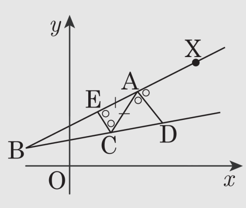


▶ 답 :

▷ 정답 : 25

해설

그림과 같이 점 C에서 $\overline{AD}$ 와 평행하게 $\overline{CE}$ 를 그리면



∠AEC = ∠ACE 가 되어 $\overline{CA} = \overline{EA}$가 성립한다.

$\overline{BA} : \overline{EA}(\overline{CA}) = \overline{BD} : \overline{CD}$

$\overline{BA} = \sqrt{(7+5)^2+(6-1)^2} = \sqrt{169} = 13$

$\overline{CA} = \sqrt{(7-3)^2+(6-3)^2} = \sqrt{25} = 5$

따라서 점 D 는 $\overline{BC}$ 를 13 : 5 로 외분하는 점이다.

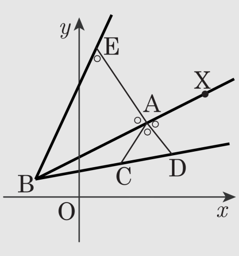
$x = \dfrac{13\times3-5\times(-5)}{13-5} = 8$,

$y = \dfrac{13\times3-5\times1}{13-5} = \dfrac{17}{4}$

$\therefore x+4y = 8+4\times\dfrac{17}{4} = 25$

해설

다음 그림과 같이 $\overline{AC}$ 와 평행이 되게 점 B에서 그린 직선과 $\overline{AD}$ 의 연장선과의 교점을 E 라 하면 △ACD 와 △EBD 는 닮음이고, △ABE 는 이등변삼각형이다.



$\overline{DC} : \overline{DB} = \overline{AC} : \overline{EB} = \overline{AC} : \overline{AB}$

즉, 점 D 는 $\overline{BC}$ 를 $\overline{AB} : \overline{AC}$ 로 외분하는 점이다.

(이하는 위의 해설과 같은 과정이다.)