1. 정의역이 $\{x \mid x < 2\}$ 인 두 함수 $f(x) = \dfrac{10-3x}{x-2}$, $g(x) = 2\sqrt{5-x}+7$ 에 대하여 $(g \circ f)(-2)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 13

해설

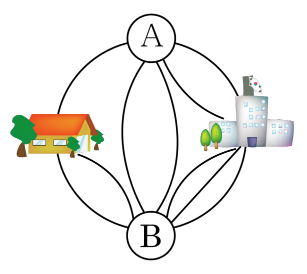
$(g \circ f)(x) = g(f(x))$ 이므로

$(g \circ f)(-2) = g(f(-2))$

$f(-2) = \dfrac{10 - 3 \cdot (-2)}{-2-2} = -4$

$\therefore\ (g \circ f)(-2) = g(-4) = 2\sqrt{5-(-4)} + 7 = 13$

2. 집과 학교 사이에는 그림과 같이 길이 놓여 있을 때, 집에서 학교로 가는 방법의 수는? (단, 같은 지점을 두 번 지나지 않는다.)



① 22　　② 34　　③ 47　　④ 54　　⑤ 66

해설

(1) 집$\rightarrow A \rightarrow$ 학교 : $1 \times 2 = 2$
(2) 집$\rightarrow B \rightarrow$ 학교 : $2 \times 3 = 6$
(3) 집$\rightarrow A \rightarrow B \rightarrow$ 학교 : $1 \times 2 \times 3 = 6$
(4) 집$\rightarrow B \rightarrow A \rightarrow$ 학교 : $2 \times 2 \times 2 = 8$
$\therefore\ 2 + 6 + 6 + 8 = 22$

3. 다섯 개의 숫자 1, 2, 3, 4, 5 에서 서로 다른 세 숫자를 택하여 세 자리의 자연수를 만들 때, 5 의 배수의 개수는?

① 12 ② 14 ③ 16 ④ 18 ⑤ 20

해설

다섯 개의 숫자 1, 2, 3, 4, 5 에서 서로 다른 세 숫자를 택하여 만든 세 자리의 자연수가 5 의 배수이려면 일의 자리의 수가 5 이어야 한다.
따라서, 1, 2, 3, 4 에서 서로 다른 두 숫자를 택하여 백의 자리와 십의 자리에 배열하면 되므로 구하는 5 의 배수의 개수는 ${}_4P_2 = 4 \times 3 = 12$ (개)

4. 어느 세 점도 일직선 위에 있지 않은 7 개의 점이 있을 때, 점을 연결하여 만들 수 있는 삼각형의 개수를 구하여라.

▶ 답 : ＿＿＿＿＿＿＿＿ 개

▷ 정답 : 35 개

해설

${}_7C_3 = 35$

5. $(1+a)(1+b)(1+c)=8$ 인 양수 $a,\ b,\ c$ 에 대하여 $abc \le 1$ 임을 다음과 같이 증명하였다.

증명

$(1+a)(1+b)(1+c)=8$ 을 전개하면
$1+(a+b+c)+(ab+bc+ca)+abc=8$
이때, $a>0,\ b>0,\ c>0$ 이므로 산술평균 , 기하평균의 관계를 이용하면
$a+b+c \ge 3\ \sqrt[3]{abc}$
(단, 등호는 $a=b=c$ 일 때 성립)
$ab+bc+ca \ge 3$ ([가])
(단, 등호는 $a=b=c$ 일 때 성립)
$\therefore S\ \ge 1+3\ \sqrt[3]{abc}+3(\sqrt[3]{abc})^2+abc$
$=(1+\sqrt[3]{abc})^3$
따라서 $^3\sqrt{abc}+1 \le 2,\quad abc \le 1$
(단, 등호는 ([나]) 일 때 성립)

위의 증명에서 [가], [나], [다] 에 알맞은 것을 순서대로 적으면 ?

① $abc,\ a=b=c=1$
② $\sqrt[3]{abc},\ a=2$ 이고 $b=c$
③ $(\sqrt[3]{abc})^2,\ a=b=c=1$
④ $abc,\ a=b$ 이고 $c=2$
⑤ $(\sqrt[3]{abc})^2,\ a=b=c=2$

해설

$(1+a)(1+b)(1+c)=8$ 을 전개하면
$1+(a+b+c)+(ab+bc+ca)+abc=8$
이 때 $a>0,\ b>0,\ c>0$ 이므로
산술평균, 기하평균의 관계를 이용하면
$a+b+c \ge 3\sqrt[3]{abc}$
(단, 등호는 $a=b=c$ 일 때 성립)
$ab+bc+ca \ge 3(\sqrt[3]{abc})^2$
(단, 등호는 $a=b=c$ 일 때 성립)
$\therefore 8 \ge 1+3\sqrt[3]{abc}+3(\sqrt[3]{abc})^2+abc$
$=(1+\sqrt[3]{abc})^3$
따라서 $\sqrt[3]{abc}+1 \le 2,\ abc \le 1$
(단, 등호는 $a=b=c=1$ 일 때 성립)

6. 밑변의 길이와 높이의 길이의 곱이 8인 직각삼각형이 있다. 이 때 빗변의 길이의 최솟값과 그 때의 가로의 길이를 합한 값은?

① $2\sqrt{2}$ ② 4 ③ $4\sqrt{2}$ ④ 8 ⑤ $8\sqrt{2}$

해설

밑변의 길이를 x, 높이를 y라 하면

$xy = 8 \cdots$ ㉠

피타고라스의 정리에 의하여 빗변의 길이는 $\sqrt{x^2+y^2}$이다.

$x > 0,\ y > 0$이므로

산술평균과 기하평균에 의하여

$x^2 + y^2 \geq 2\sqrt{x^2 \cdot y^2} = 2xy = 16$

$\sqrt{x^2+y^2} \geq \sqrt{16} = 4$

단, 등호는 $x^2 = y^2$ 즉 $x = y$일 때 성립한다.

$x = y$를 ㉠에 대입하면 $x^2 = 8$

따라서 $x = 2\sqrt{2}$이다.

$4 \times 2\sqrt{2} = 8\sqrt{2}$

7. 10000 원짜리 지폐 3 장, 5000 원짜리 지폐 3 장, 1000 원짜리 지폐 4 장이 있다. 이 지폐의 일부 또는 전부를 사용하여 지불할 수 있는 금액의 수를 구하여라.

▶ 답: ______ 가지

▷ 정답 : 49 가지

해설

10000 원짜리 1 장으로 지불하는 금액과 5000 원짜리 2 장으로 지불하는 금액이 같으므로 10000 원짜리 지폐 3 장을 5000 원짜리 지폐 6 장으로 바꾸면 지불할 수 있는 금액의 수는 5000 원짜리 지폐 9 장, 1000 원짜리 지폐 4 장의 지불 방법의 수와 같다.
5000 원짜리를 지불하는 방법의 수는
$0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$ 장의 10 가지
1000 원짜리를 지불하는 방법의 수는
$0, 1, 2, 3, 4$ 장의 5 가지
이때, 지불하지 않는 경우가 1 가지이므로
이를 제외하면
$10 \cdot 5 - 1 = 49$

8. *april* 의 5 개의 문자를 일렬로 나열할 때, p, r, l 은 이 순서로 나열하는 방법의 수는?

① 20 ② 24 ③ 30 ④ 60 ⑤ 120

해설

5 개의 문자를 나열한 후 p, r, l 을 나열하는 방법의 수로 나눈다.

$\therefore \dfrac{5!}{3!} = 20$

9. $X = \{1, 2, 3\}$ 에서 $Y = \{a, b, c, d, e\}$ 로 대응되는 함수 중 $x_1 < x_2$ 이면 $f(x_1) < f(x_2)$ 인 함수의 개수를 구하여라.

▶ 답: ______ 개

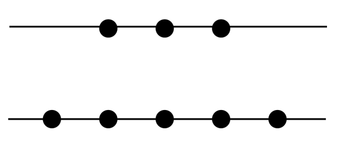
▷ 정답: 10 개

해설

Y 의 원소 5 개 중 X 의 원소 1, 2, 3 에 대응될 원소 3 개를 뽑으면 된다.

${}_5C_3 = 10$

10. 그림과 같이 두 평행선 위에 8개의 점이 있다. 주어진 점을 연결하여 만들 수 있는 서로 다른 직선의 개수는?



① 15　② 16　③ 17　④ 18　⑤ 19

해설

윗줄의 점 3 개 중 하나를 선택하고 아래줄
5 개 점 중 하나를 선택하여 직선을 만든다.
$\Rightarrow {}_3C_1 \times {}_5C_1 = 15$
윗줄, 아래줄 모두 직선이 하나씩 있다.
$\therefore 15 + 1 + 1 = 17$

11. 서로 다른 9 개의 사탕이 있을 때, 사탕을 3 개씩 세 묶음으로 나누어 갑, 을, 병에게 나누어 주는 경우의 수를 구하여라.

▶ 답: 가지

▷ 정답: 1680 가지

해설

$_9C_3 \times _6C_3 \times _3C_3 \times \frac{1}{3!} \times 3! = 1680$

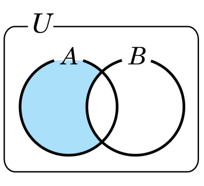
12. 세 집합 $A = \{a, b, c, d, e\}$, $B = \{b, c, d\}$, $C = \{a, b, e\}$에 대하여 $(B \cap X) \subset (C \cap X)$를 만족시키는 A의 부분집합 X의 개수는?

① 4개　② 7개　③ 8개　④ 15개　⑤ 16개

해설

X는 B의 원소이지만 C의 원소가 아닌 c, d를 원소로 가져서는 안된다. 또한 $B \cap C$의 원소인 b는 X의 원소가 되거나 되지 않아도 조건을 성립시킨다.
$\therefore \{a, b, e\}$의 부분집합의 개수와 같다.
$\therefore 2^3 = 8$(개)

13. 전체집합 U 의 두 부분집합 A, B 에 대하여 다음 그림과 같이 벤 다이어그램을 그린 후 원소를 써 넣어 보았더니 색칠한 부분에는 원소가 하나도 없었다. 다음 중 항상 옳은 것은?

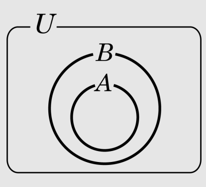


① $B \subset A$ ② $n(A) < n(B)$ ③ $A \cup B = B$

④ $B - A = \varnothing$ ⑤ $A^c \subset B^c$

해설

주어진 벤 다이어그램에서 색칠한 부분이 공집합이므로 집합 A 는 집합 B 에 포함된다. 따라서 $A \cup B = B$ 가 항상 성립한다.



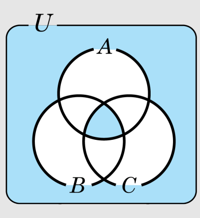
14. 전체집합 $U = \{x \mid x$는 20 이하의 자연수$\}$의 세 부분집합
$A = \{x \mid x$는 20 이하의 3의 배수$\}$,
$B = \{x \mid x$는 20 이하의 4의 배수$\}$,
$C = \{1,\ 2,\ 5,\ 7,\ 11,\ 12\}$에 대하여 $A \triangle B = (A \cap B) \cup (A \cup B)^c$ 일 때,
$n((A \triangle B) \cap (A \triangle C))$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

$(A \triangle B) \cap (A \triangle C)$를 벤 다이어그램에 나타내면 다음과 같다.



$n(A \cap B \cap C) = 1,\ n((A \cup B \cup C)^c) = 4$
$\therefore\ n((A \triangle B) \cap (A \triangle C)) = 1 + 4 = 5$

15. $a > 1$일 때 $b = \frac{1}{2}\left(a + \frac{1}{a}\right)$, $c = \frac{1}{2}\left(b + \frac{1}{b}\right)$이라 한다. a, b, c의 대소 관계로 옳은 것은?

① $a > b > c$　　② $a > c > b$　　③ $b > c > a$
④ $b > a > c$　　⑤ $c > b > a$

해설

$b - a = \frac{1}{2}\left(a + \frac{1}{a}\right) - a = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a} - a\right)$

그런데, $a > 1$이므로 $\frac{1}{a} - a < 0$ $\therefore\ b < a$

또, $b = \frac{1}{2}\left(a + \frac{1}{a}\right) > \sqrt{a \cdot \frac{1}{a}} = 1$ $\left(\because\ a \neq \frac{1}{a}\right)$

$c - b = \frac{1}{2}\left(b + \frac{1}{b}\right) - b = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{b} - b\right) < 0$

$\therefore\ c < b$

$\therefore\ a > b > c$

16. 분수함수 $y = \dfrac{2x+3}{x+2}$ 의 치역이 $\{y \mid y > 2\}$ 일 때, 다음 중 정의역을 바르게 구한 것은?

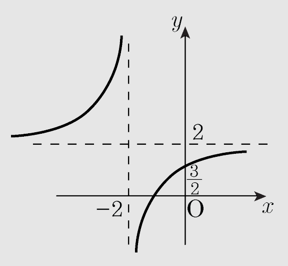
① $\{x \mid -3 < x < -2\}$　　② $\{x \mid x < -2\}$

③ $\{x \mid -2 < x\}$　　④ $\{x \mid -2 \le x < 2\}$

⑤ $\{x \mid -2 \le x < 3\}$

해설

$$y = \frac{2x+3}{x+2} = \frac{2(x+2)-1}{x+2} = 2 + \frac{-1}{x+2}$$

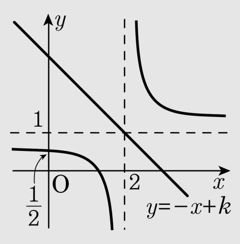


정의역은 $\{x \mid x < -2\}$

17. 분수함수 $y=\dfrac{x-1}{x-2}$ 의 그래프가 직선 $y=-x+k$에 대하여 대칭일 때, 상수 k의 값을 구하여라.

① -1　② 1　③ 3　④ 5　⑤ 7

해설



$y=\dfrac{x-1}{x-2}$

$=\dfrac{(x-2)+1}{x-2}$

$=\dfrac{1}{x-2}+1$

따라서, 점근선이

$x=2,\ y=1$인 분수함수이므로 그래프는

다음과 같다.

다음 그래프가 직선 $y=-x+k$에 대하여

대칭이려면

직선이 두 점근선의 교점인 $(2,\ 1)$을 지나야 하므로

$1=-2+k$

$\therefore\ k=3$

18. ${}_2C_2 + {}_3C_2 + {}_4C_2 + {}_5C_2 + \cdots + {}_{10}C_2$ 의 값과 같은 것은?

① ${}_{11}C_6$ ② ${}_{11}C_7$ ③ ${}_{11}C_8$ ④ ${}_{11}C_9$ ⑤ ${}_{11}C_{10}$

해설

${}_nC_{r-1} + {}_nC_r = {}_{n+1}C_r$, ${}_2C_2 = {}_3C_3$ 이므로

${}_2C_2 + {}_3C_2 + {}_4C_2 + {}_5C_2 + \cdots + {}_{10}C_2$

$= {}_4C_3 + {}_4C_2 + {}_5C_2 + \cdots + {}_{10}C_2$

$= {}_5C_3 + {}_5C_2 + \cdots + {}_{10}C_2 \cdots = {}_{11}C_3 = {}_{11}C_8$

19. 6 권의 서로 다른 책을 2 개, 2 개, 2 개로 나누어서 3 개의 서로 다른 가방 A, B, C 에 담을 때, 특정한 책 하나는 반드시 가방 A 에 담는 방법의 수를 구하여라.

▶ 답: 가지

▷ 정답: 30 가지

해설

특정한 책 하나는 반드시 가방 A 에 담아야 하므로 나머지 5 개의 책을 가방 A 에 1 개, 가방 B 에 2 개, 가방 C 에 2 개를 나누어 담으면 된다.
따라서, 구하는 경우의 수는
${}_5C_1 \times {}_4C_2 \times {}_2C_2 = 30$ (가지)

20. 집합 $A = \{x | x = 2^{\alpha} \times 3^{\beta} \times 5^{\gamma}, \alpha,\ \beta,\ \gamma$ 는 음이 아닌 정수$\}$ 에 대하여 $B = \{y | y \in A,\ 1 \le y \le 10\}$ 의 부분집합으로서 1, 5, 10 을 모두 포함하고 3 의 배수를 적어도 하나 포함하는 것의 개수는?

① 56　② 64　③ 80　④ 32　⑤ 48

해설

문제의 조건에 따라 $B = \{\ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10\}$ 이고
B 의 원소 중 3 의 배수는 3 개다. $n(B) = 9$
㉠ 1, 5, 10 을 모두 포함한 B 의 부분집합의 개수 : $2^{9-3} = 2^6$
㉡ 1, 5, 10 을 모두 포함하고 3 의 배수를 전혀 포함하지 않는 B 의 부분집합의 개수 : $2^{6-3} = 2^3$
∴ 1, 5, 10 을 모두 포함하고 3 의 배수를 적어도 하나 포함하는 B 의 부분집합의 개수는 $2^6 - 2^3 = 56$

21. 집합 $A_k = \{x|x\text{는 } 10 \text{ 이하의 } k\text{의 배수}\}$ 이라 정의한다. 집합 $P = \{xy|x \in A_2,\ y \in A_3\}$ 에 대하여 다음 조건을 만족하는 집합 X 의 개수를 구하여라.

- $X \subset P$
- $X \cap \{xy|x \in A_4,\ y \in A_6\}$
$= \{xy|x \in A_4,\ y \in A_6\}$

▶ 답 : 개

▷ 정답 : 512 개

해설

$A_k = \{x|x\text{는 } 10 \text{ 이하의 } k\text{의 배수}\}$,
$A_2 = \{2, 4, 6, 8, 10\}$, $A_3 = \{3, 6, 9\}$,
$P = \{xy|x \in A_2,\ y \in A_3\} = \{6, 12, 18, 24, 30, 36, 48, 54, 60, 72, 90\}$
,
$X \subset P$, $\{xy|x \in A_4,\ y \in A_6\} = \{24, 48\}$ 이므로
$X \cap \{xy|x \in A_4, y \in A_6\} = \{xy|x \in A_4,\ y \in A_6\}$, $\{24, 48\} \subset X$
따라서 집합 X 는 집합 P 의 부분집합 중, 24 , 48 을 반드시 포함하는 부분집합이므로 집합 X 의 개수는 $2^{11-2} = 512$ (개)

22. 자연수를 원소로 하는 세 집합 $A = \{x|2 \le x \le 10\}$, $B = \{x|5 \le x \le 12\}$, $C = \{x|9 \le x \le 15\}$ 에 대하여 $A \odot B = (A \cup B) - (A \cap B)$ 라 할 때, $n((B \odot C) \odot A)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

$A \odot B = (A \cup B) - (A \cap B)$ 이므로,

$$
\begin{aligned}
&((B \odot C) \odot A) \\
&= (((B \cup C) - (B \cap C)) \odot A) \\
&= (\{5, 6, 7, 8, 13, 14, 15\} \odot \{x|2 \le x \le 10\}) \\
&= (\{5, 6, 7, 8, 13, 14, 15\} \cup \{x|2 \le x \le 10\}) \\
&\quad -(\{5, 6, 7, 8, 13, 14, 15\} \cap \{x|2 \le x \le 10\}) \\
&= \{2, 3, 4, 9, 10, 13, 14, 15\} \\
&\therefore\ n((B \odot C) \odot A) = 8
\end{aligned}
$$

23. 자연수 n을 적당한 정수 k_i를 써서 $n = 2^{k_1} + 2^{k_2} + \cdots + 2^{k_z}$ 로 나타낼 때, $A(n) = \{k_1,\ k_2, \cdots,\ k_z\}$으로 정의한다. (단, $0 \le k_1 < k_2 \cdots < k_z$) 이 때, $A(29)$ 의 원소의 총합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 9

해설

문제의 요구대로 29 를 2 진법의 전개식으로 나타내면 $29 = 16 + 8 + 4 + 1 = 2^4 + 2^3 + 2^2 + 2^0$ 이다.

$\therefore\ A(29) = \{4,\ 3,\ 2,\ 0\}$

원소의 총합은 $4 + 3 + 2 + 0 = 9$

24. 실수 a, b, c에 대하여 $a+b+c=2,\ a^2+b^2+c^2=4$가 성립할 때, 실수 c의 최솟값과 최댓값의 합을 구하면?

① $\frac{1}{3}$　　② $\frac{2}{3}$　　③ 1　　④ $\frac{4}{3}$　　⑤ $\frac{5}{3}$

해설

$a+b+c=2 \Rightarrow a+b=2-c$

$a^2+b^2+c^2=4 \Rightarrow a^2+b^2=4-c^2$

코시-슈바르츠 부등식에 의해

$(1^2+1^2)(a^2+b^2) \geq (a+b)^2$

$2(4-c^2) \geq (2-c)^2$

$8-2c^2 \geq 4-4c+c^2$

$3c^2-4c-4 \leq 0$

$(c-2)(3c+2) \leq 0,$

$-\frac{2}{3} \leq c \leq 2$

$\therefore$ c의 최댓값 : 2, 최솟값 : $-\frac{2}{3}$

합 : $2+\left(-\frac{2}{3}\right)=\frac{4}{3}$

25. 분수식 $\frac{(x+3)\sqrt{8+2x-x^2}}{x^2-3x+2}$이 실수가 되기 위한 정수 x값들의 총합은?

① 1　　② 2　　③ 4　　④ 6　　⑤ 8

해설

$8+2x-x^2 \geq 0$에서 $x^2-2x-8 \leq 0$

$(x+2)(x-4) \leq 0$

$\therefore -2 \leq x \leq 4$

(i) 분모 $=(x-1)(x-2) \neq 0$에서 $x \neq 1,\ 2$

(ii) 분자 $=x+3=0$에서 $x=-3$

$\therefore$ 정수 $x=-3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 3,\ 4$이고

(합)$=-3-2-1+0+3+4=1$