

1. 정의역이 $\{x \mid x < 2\}$ 인 두 함수 $f(x) = \frac{10-3x}{x-2}$, $g(x) = 2\sqrt{5-x} + 7$ 에 대하여 $(g \circ f)(-2)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 13

해설

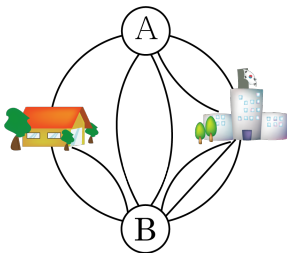
$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) \text{ 이므로}$$

$$(g \circ f)(-2) = g(f(-2))$$

$$f(-2) = \frac{10 - 3 \cdot (-2)}{-2 - 2} = -4$$

$$\therefore (g \circ f)(-2) = g(-4) = 2\sqrt{5 - (-4)} + 7 = 13$$

2. 집과 학교 사이에는 그림과 같이 길이 놓여 있을 때, 집에서 학교로 가는 방법의 수는? (단, 같은 지점을 두 번 지나지 않는다.)



① 22

② 34

③ 47

④ 54

⑤ 66

해설

(1) 집 $\rightarrow A \rightarrow$ 학교 : $1 \times 2 = 2$

(2) 집 $\rightarrow B \rightarrow$ 학교 : $2 \times 3 = 6$

(3) 집 $\rightarrow A \rightarrow B \rightarrow$ 학교 : $1 \times 2 \times 3 = 6$

(4) 집 $\rightarrow B \rightarrow A \rightarrow$ 학교 : $2 \times 2 \times 2 = 8$

$\therefore 2 + 6 + 6 + 8 = 22$

3. 다섯 개의 숫자 1, 2, 3, 4, 5 에서 서로 다른 세 숫자를 택하여 세 자리의 자연수를 만들 때, 5 의 배수의 개수는?

①

12

② 14

③ 16

④ 18

⑤ 20

해설

다섯 개의 숫자 1, 2, 3, 4, 5 에서 서로 다른 세 숫자를 택하여 만든 세 자리의 자연수가 5 의 배수하려면 일의 자리의 수가 5 이어야 한다.

따라서, 1, 2, 3, 4 에서 서로 다른 두 숫자를 택하여 백의 자리와 십의 자리에 배열하면 되므로 구하는 5 의 배수의 개수는 ${}_4P_2 = 4 \times 3 = 12$ (개)

4. 어느 세 점도 일직선 위에 있지 않은 7 개의 점이 있을 때, 점을 연결하여 만들 수 있는 삼각형의 개수를 구하여라.

▶ 답 : 개

▷ 정답 : 35 개

해설

$${}_7C_3 = 35$$

5. $(1+a)(1+b)(1+c) = 8$ 인 양수 a, b, c 에 대하여 $abc \leq 1$ 임을 다음과 같이 증명하였다.

증명

$(1+a)(1+b)(1+c) = 8$ 을 전개하면

$$1 + (a+b+c) + (ab+bc+ca) + abc = 8$$

이때, $a > 0, b > 0, c > 0$ 이므로 산술평균, 기하평균의 관계를 이용하면

$$a+b+c \geq 3\sqrt[3]{abc}$$

(단, 등호는 $a=b=c$ 일 때 성립)

$$ab+bc+ca \geq 3([가])$$

(단, 등호는 $a=b=c$ 일 때 성립)

$$\therefore S \geq 1 + 3\sqrt[3]{abc} + 3(\sqrt[3]{abc})^2 + abc$$

$$= (1 + \sqrt[3]{abc})^3$$

$$\text{따라서 } 3\sqrt[3]{abc} + 1 \leq 2, \quad abc \leq 1$$

(단, 등호는 ([나]) 일 때 성립)

위의 증명에서 [가], [나], [다]에 알맞은 것을 순서대로 적으면 ?

- ① $abc, a=b=c=1$ ② $\sqrt[3]{abc}, a=2$ 이고 $b=c$
 ③ $(\sqrt[3]{abc})^2, a=b=c=1$ ④ $abc, a=b$ 이고 $c=2$
 ⑤ $(\sqrt[3]{abc})^2, a=b=c=2$

해설

$(1+a)(1+b)(1+c) = 8$ 을 전개하면

$$1 + (a+b+c) + (ab+bc+ca) + abc = 8$$

이 때 $a > 0, b > 0, c > 0$ 이므로

산술평균, 기하평균의 관계를 이용하면

$$a+b+c \geq 3\sqrt[3]{abc}$$

(단, 등호는 $a=b=c$ 일 때 성립)

$$ab+bc+ca \geq 3(\sqrt[3]{abc})^2$$

(단, 등호는 $a=b=c$ 일 때 성립)

$$\therefore 8 \geq 1 + 3\sqrt[3]{abc} + 3(\sqrt[3]{abc})^2 + abc$$

$$= (1 + \sqrt[3]{abc})^3$$

$$\text{따라서 } 3\sqrt[3]{abc} + 1 \leq 2, \quad abc \leq 1$$

(단, 등호는 $a=b=c=1$ 일 때 성립)

6. 밑변의 길이와 높이의 길이의 곱이 8인 직각삼각형이 있다. 이 때 빗변의 길이의 최솟값과 그 때의 가로 길이를 합한 값은?

① $2\sqrt{2}$

② 4

③ $4\sqrt{2}$

④ 8

⑤ $8\sqrt{2}$

해설

밑변의 길이를 x , 높이를 y 라 하면

$$xy = 8 \cdots \textcircled{7}$$

피타고라스의 정리에 의하여 빗변의 길이는 $\sqrt{x^2 + y^2}$ 이다.

$x > 0, y > 0$ 이므로

산술평균과 기하평균에 의하여

$$x^2 + y^2 \geq 2\sqrt{x^2 \cdot y^2} = 2xy = 16$$

$$\sqrt{x^2 + y^2} \geq \sqrt{16} = 4$$

단, 등호는 $x^2 = y^2$ 즉 $x = y$ 일 때 성립한다.

$x = y$ 를 $\textcircled{7}$ 에 대입하면 $x^2 = 8$

따라서 $x = 2\sqrt{2}$ 이다.

$$4 \times 2\sqrt{2} = 8\sqrt{2}$$

7. 10000 원짜리 지폐 3장, 5000 원짜리 지폐 3장, 1000 원짜리 지폐 4장이 있다. 이 지폐의 일부 또는 전부를 사용하여 지불할 수 있는 금액의 수를 구하여라.

▶ 답 : 가지

▷ 정답 : 49 가지

해설

10000 원짜리 1장으로 지불하는 금액과 5000 원짜리 2장으로 지불하는 금액이 같으므로 10000 원짜리 지폐 3장을 5000 원짜리 지폐 6장으로 바꾸면 지불할 수 있는 금액의 수는 5000 원짜리 지폐 9장, 1000 원짜리 지폐 4장의 지불 방법의 수와 같다.

5000 원짜리를 지불하는 방법의 수는

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9장의 10가지

1000 원짜리를 지불하는 방법의 수는

0, 1, 2, 3, 4장의 5가지

이때, 지불하지 않는 경우가 1가지이므로

이를 제외하면

$$10 \cdot 5 - 1 = 49$$

8. *april*의 5개의 문자를 일렬로 나열할 때, p , r , l 은 이 순서로 나열하는 방법의 수는?

① 20

② 24

③ 30

④ 60

⑤ 120

해설

5 개의 문자를 나열한 후 p , r , l 을 나열하는 방법의 수로 나눈다.

$$\therefore \frac{5!}{3!} = 20$$

9. $X = \{1, 2, 3\}$ 에서 $Y = \{a, b, c, d, e\}$ 로 대응되는 함수 중 $x_1 < x_2$ 이면 $f(x_1) < f(x_2)$ 인 함수의 개수를 구하여라.

▶ 답 : 개

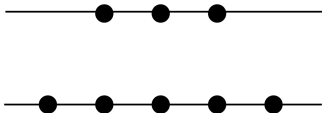
▷ 정답 : 10 개

해설

Y 의 원소 5개 중 X 의 원소 1, 2, 3에 대응될 원소 3개를 뽑으면 된다.

$${}_5C_3 = 10$$

10. 그림과 같이 두 평행선 위에 8개의 점이 있다. 주어진 점을 연결하여 만들 수 있는 서로 다른 직선의 개수는?



① 15

② 16

③ 17

④ 18

⑤ 19

해설

윗줄의 점 3 개 중 하나를 선택하고 아래줄
5 개 점 중 하나를 선택하여 직선을 만든다.

$$\Rightarrow {}_3C_1 \times {}_5C_1 = 15$$

윗줄, 아래줄 모두 직선이 하나씩 있다.

$$\therefore 15 + 1 + 1 = 17$$

11. 서로 다른 9 개의 사탕이 있을 때, 사탕을 3 개씩 세 묶음으로 나누어 갑, 을, 병에게 나누어 주는 경우의 수를 구하여라.

▶ 답 : 가지

▷ 정답 : 1680 가지

해설

$${}_9C_3 \times {}_6C_3 \times {}_3C_3 \times \frac{1}{3!} \times 3! = 1680$$

12. 세 집합 $A = \{a, b, c, d, e\}$, $B = \{b, c, d\}$, $C = \{a, b, e\}$ 에 대하여 $(B \cap X) \subset (C \cap X)$ 를 만족시키는 A 의 부분집합 X 의 개수는?

① 4개

② 7개

③ 8개

④ 15개

⑤ 16개

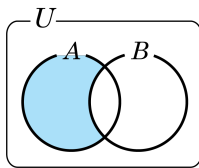
해설

X 는 B 의 원소이지만 C 의 원소가 아닌 c, d 를 원소로 가져서는 안된다. 또한 $B \cap C$ 의 원소인 b 는 X 의 원소가 되거나 되지 않아도 조건을 성립시킨다.

$\therefore \{a, b, e\}$ 의 부분집합의 개수와 같다.

$\therefore 2^3 = 8(\text{개})$

13. 전체집합 U 의 두 부분집합 A, B 에 대하여 다음 그림과 같이 벤 다이어그램을 그린 후 원소를 써 넣어 보았더니 색칠한 부분에는 원소가 하나도 없었다. 다음 중 항상 옳은 것은?



① $B \subset A$

② $n(A) < n(B)$

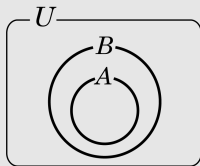
③ $A \cup B = B$

④ $B - A = \emptyset$

⑤ $A^c \subset B^c$

해설

주어진 벤 다이어그램에서 색칠한 부분이 공집합이므로 집합 A 는 집합 B 에 포함된다. 따라서 $A \cup B = B$ 가 항상 성립한다.



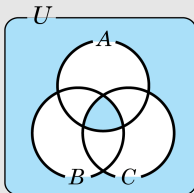
14. 전체집합 $U = \{x \mid x \text{는 } 20 \text{ 이하의 자연수}\}$ 의 세 부분집합
 $A = \{x \mid x \text{는 } 20 \text{ 이하의 } 3\text{의 배수}\},$
 $B = \{x \mid x \text{는 } 20 \text{ 이하의 } 4\text{의 배수}\},$
 $C = \{1, 2, 5, 7, 11, 12\}$ 에 대하여 $A \Delta B = (A \cap B) \cup (A \cup B)^c$ 일 때,
 $n((A \Delta B) \cap (A \Delta C))$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

$(A \Delta B) \cap (A \Delta C)$ 를 벤 다이어그램에 나타내면 다음과 같다.



$$n(A \cap B \cap C) = 1, n((A \cup B \cup C)^c) = 4$$

$$\therefore n((A \Delta B) \cap (A \Delta C)) = 1 + 4 = 5$$

15. $a > 1$ 일 때 $b = \frac{1}{2} \left(a + \frac{1}{a} \right)$, $c = \frac{1}{2} \left(b + \frac{1}{b} \right)$ 이라 한다. a, b, c 의 대소 관계로 옳은 것은?

- ① $a > b > c$ ② $a > c > b$ ③ $b > c > a$
 ④ $b > a > c$ ⑤ $c > b > a$

해설

$$b - a = \frac{1}{2} \left(a + \frac{1}{a} \right) - a = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a} - a \right)$$

그런데, $a > 1$ 이므로 $\frac{1}{a} - a < 0 \quad \therefore b < a$

$$\text{또, } b = \frac{1}{2} \left(a + \frac{1}{a} \right) > \sqrt{a \cdot \frac{1}{a}} = 1 \quad \left(\because a \neq \frac{1}{a} \right)$$

$$c - b = \frac{1}{2} \left(b + \frac{1}{b} \right) - b = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{b} - b \right) < 0$$

$$\therefore c < b$$

$$\therefore a > b > c$$

16. 분수함수 $y = \frac{2x+3}{x+2}$ 의 치역이 $\{y \mid y > 2\}$ 일 때, 다음 중 정의역을
바르게 구한 것은?

① $\{x \mid -3 < x < -2\}$

② $\{x \mid x < -2\}$

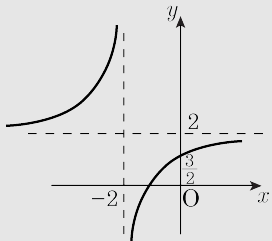
③ $\{x \mid -2 < x\}$

④ $\{x \mid -2 \leq x < 2\}$

⑤ $\{x \mid -2 \leq x < 3\}$

해설

$$y = \frac{2x+3}{x+2} = \frac{2(x+2)-1}{x+2} = 2 + \frac{-1}{x+2}$$



정의역은 $\{x \mid x < -2\}$

17. 분수함수 $y = \frac{x-1}{x-2}$ 의 그래프가 직선 $y = -x + k$ 에 대하여 대칭일 때, 상수 k 의 값을 구하여라.

① -1

② 1

③ 3

④ 5

⑤ 7

해설

$$\begin{aligned} y &= \frac{x-1}{x-2} \\ &= \frac{(x-2)+1}{x-2} \\ &= \frac{1}{x-2} + 1 \end{aligned}$$

따라서, 점근선이

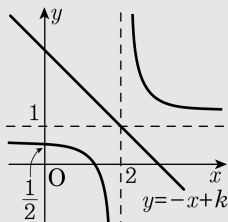
$x = 2$, $y = 1$ 인 분수함수이므로 그래프는 다음과 같다.

다음 그래프가 직선 $y = -x + k$ 에 대하여 대칭하려면

직선이 두 점근선의 교점인 $(2, 1)$ 을 지나야 하므로

$$1 = -2 + k$$

$$\therefore k = 3$$



18. ${}_2C_2 + {}_3C_2 + {}_4C_2 + {}_5C_2 + \cdots + {}_{10}C_2$ 의 값과 같은 것은?

① ${}_{11}C_6$

② ${}_{11}C_7$

③ ${}_{11}C_8$

④ ${}_{11}C_9$

⑤ ${}_{11}C_{10}$

해설

${}_nC_{r-1} + {}_nC_r = {}_{n+1}C_r$, ${}_2C_2 = {}_3C_3$ 이므로

$${}_2C_2 + {}_3C_2 + {}_4C_2 + {}_5C_2 + \cdots + {}_{10}C_2$$

$$= {}_4C_3 + {}_4C_2 + {}_5C_2 + \cdots + {}_{10}C_2$$

$$= {}_5C_3 + {}_5C_2 + \cdots + {}_{10}C_2 \cdots = {}_{11}C_3 = {}_{11}C_8$$

19. 6 권의 서로 다른 책을 2 개, 2 개, 2 개로 나누어서 3 개의 서로 다른 가방 A, B, C 에 담을 때, 특정한 책 하나는 반드시 가방 A 에 담는 방법의 수를 구하여라.

▶ 답 : 가지

▷ 정답 : 30가지

해설

특정한 책 하나는 반드시 가방 A 에 담아야 하므로 나머지 5 개의 책을 가방 A 에 1 개, 가방 B 에 2 개, 가방 C 에 2 개를 나누어 담으면 된다.

따라서, 구하는 경우의 수는

$${}_5C_1 \times {}_4C_2 \times {}_2C_2 = 30 \text{ (가지)}$$

20. 집합 $A = \{x | x = 2^\alpha \times 3^\beta \times 5^\gamma, \alpha, \beta, \gamma \text{ 는 음이 아닌 정수}\}$ 에 대하여 $B = \{y | y \in A, 1 \leq y \leq 10\}$ 의 부분집합으로서 1, 5, 10 을 모두 포함하고 3 의 배수를 적어도 하나 포함하는 것의 개수는?

- ① 56 ② 64 ③ 80 ④ 32 ⑤ 48

해설

문제의 조건에 따라 $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10\}$ 이고
 B 의 원소 중 3 의 배수는 3 개다. $n(B) = 9$

㉠ 1, 5, 10 을 모두 포함한 B 의 부분집합의 개수 : $2^{9-3} = 2^6$

㉡ 1, 5, 10 을 모두 포함하고 3 의 배수를 전혀 포함하지 않는 B 의 부분집합의 개수 : $2^{6-3} = 2^3$

$\therefore$ 1, 5, 10 을 모두 포함하고 3 의 배수를 적어도 하나 포함하는 B 의 부분집합의 개수는 $2^6 - 2^3 = 56$

21. 집합 $A_k = \{x|x\text{는 } 10 \text{ 이하의 } k\text{의 배수}\}$ 이라 정의한다. 집합 $P = \{xy|x \in A_2, y \in A_3\}$ 에 대하여 다음 조건을 만족하는 집합 X 의 개수를 구하여라.

- $X \subset P$
- $X \cap \{xy|x \in A_4, y \in A_6\} = \{xy|x \in A_4, y \in A_6\}$

▶ 답 : 개

▶ 정답 : 512 개

해설

$$A_k = \{x|x\text{는 } 10 \text{ 이하의 } k\text{의 배수}\} ,$$

$$A_2 = \{2, 4, 6, 8, 10\} , A_3 = \{3, 6, 9\} ,$$

$$P = \{xy|x \in A_2, y \in A_3\} = \{6, 12, 18, 24, 30, 36, 48, 54, 60, 72, 90\}$$

,

$$X \subset P, \{xy|x \in A_4, y \in A_6\} = \{24, 48\} \text{ 이므로}$$

$$X \cap \{xy|x \in A_4, y \in A_6\} = \{xy|x \in A_4, y \in A_6\}, \{24, 48\} \subset X$$

따라서 집합 X 는 집합 P 의 부분집합 중, 24 , 48 을 반드시 포함하는 부분집합이므로 집합 X 의 개수는 $2^{11-2} = 512$ (개)

22. 자연수를 원소로 하는 세 집합 $A = \{x|2 \leq x \leq 10\}$, $B = \{x|5 \leq x \leq 12\}$, $C = \{x|9 \leq x \leq 15\}$ 에 대하여 $A \odot B = (A \cup B) - (A \cap B)$ 라 할 때, $n((B \odot C) \odot A)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

$A \odot B = (A \cup B) - (A \cap B)$ 이므로,

$$\begin{aligned} & ((B \odot C) \odot A) \\ &= (((B \cup C) - (B \cap C)) \odot A) \\ &= (\{5, 6, 7, 8, 13, 14, 15\} \odot \{x|2 \leq x \leq 10\}) \\ &= (\{5, 6, 7, 8, 13, 14, 15\} \cup \{x|2 \leq x \leq 10\}) \\ &\quad - (\{5, 6, 7, 8, 13, 14, 15\} \cap \{x|2 \leq x \leq 10\}) \\ &= \{2, 3, 4, 9, 10, 13, 14, 15\} \\ \therefore n((B \odot C) \odot A) &= 8 \end{aligned}$$

23. 자연수 n 을 적당한 정수 k_i 를 써서 $n = 2^{k_1} + 2^{k_2} + \cdots + 2^{k_z}$ 로 나타낼 때, $A(n) = \{k_1, k_2, \cdots, k_z\}$ 으로 정의한다. (단, $0 \leq k_1 < k_2 < \cdots < k_z$) 이 때, $A(29)$ 의 원소의 총합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 9

해설

문제의 요구대로 29를 2진법의 전개식으로 나타내면 $29 = 16 + 8 + 4 + 1 = 2^4 + 2^3 + 2^2 + 2^0$ 이다.

$$\therefore A(29) = \{4, 3, 2, 0\}$$

원소의 총합은 $4 + 3 + 2 + 0 = 9$

24. 실수 a, b, c 에 대하여 $a + b + c = 2$, $a^2 + b^2 + c^2 = 4$ 가 성립할 때, 실수 c 의 최솟값과 최댓값의 합을 구하면?

① $\frac{1}{3}$

② $\frac{2}{3}$

③ 1

④ $\frac{4}{3}$

⑤ $\frac{5}{3}$

해설

$$a + b + c = 2 \Rightarrow a + b = 2 - c$$

$$a^2 + b^2 + c^2 = 4 \Rightarrow a^2 + b^2 = 4 - c^2$$

코시-슈바르츠 부등식에 의해

$$(1^2 + 1^2)(a^2 + b^2) \geq (a + b)^2$$

$$2(4 - c^2) \geq (2 - c)^2$$

$$8 - 2c^2 \geq 4 - 4c + c^2$$

$$3c^2 - 4c - 4 \leq 0$$

$$(c - 2)(3c + 2) \leq 0,$$

$$-\frac{2}{3} \leq c \leq 2$$

$$\therefore c \text{의 최댓값 : } 2, \text{ 최솟값 : } -\frac{2}{3}$$

$$\text{합 : } 2 + \left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{4}{3}$$

25. 분수식 $\frac{(x+3)\sqrt{8+2x-x^2}}{x^2-3x+2}$ 이 실수가 되기 위한 정수 x 값들의 총합은?

① 1

② 2

③ 4

④ 6

⑤ 8

해설

$$8 + 2x - x^2 \geq 0 \text{에서 } x^2 - 2x - 8 \leq 0$$

$$(x+2)(x-4) \leq 0$$

$$\therefore -2 \leq x \leq 4$$

$$(i) \text{ 분모 } = (x-1)(x-2) \neq 0 \text{에서 } x \neq 1, 2$$

$$(ii) \text{ 분자 } = x+3=0 \text{에서 } x=-3$$

$$\therefore \text{정수 } x = -3, -2, -1, 0, 3, 4 \text{이고}$$

$$(\text{합}) = -3 - 2 - 1 + 0 + 3 + 4 = 1$$