1. $(a+1)(a^2-a+1)=a^3+1$을 이용하여 $\dfrac{1999^3+1}{1998\times1999+1}$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2000

해설

$a=1999$라 하면

$1998\times1999+1=(a-1)a+1=a^2-a+1$

$$\therefore \frac{1999^3+1}{1998\times1999+1}=\frac{a^3+1}{a^2-a+1}=\frac{(a+1)(a^2-a+1)}{a^2-a+1}=a+1=2000$$

2. 연립부등식 $\begin{cases} 2x+5>4x-1 \\ 3-x \le 2x+6 \end{cases}$ 의 해 중에서 정수의 개수를 구하여라.

▶ 답: ＿＿＿＿＿ 개

▷ 정답: 4개

해설

정리하면 $x<3$, $-1 \le x$
$x=-1$, 0, 1, 2 이므로 4개이다.

3. 연립부등식 $2 \leq \frac{x+1}{2} < 5$의 x의 범위를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $3 \leq x < 9$

해설

$2 \leq \frac{x+1}{2} < 5$,
$4 \leq x+1 < 10$
$\therefore 3 \leq x < 9$

4. 원 $x^2+y^2-4x+6y-1=0$ 과 같은 중심을 갖고, 점 $(1,\ 2)$ 를 지나는 원의 반지름을 r 이라 할 때, r^2 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 26

해설

준 식에서 $(x-2)^2+(y+3)^2=14$ 이므로
중심은 $(2,\ -3)$ 이다.
구하는 원의 반지름을 r 라 하면
$(x-2)^2+(y+3)^2=r^2$ 이고,
이 원이 점 $(1,\ 2)$ 를 지나므로
$(1-2)^2+(2+3)^2=r^2$
$\therefore r^2=26$

5. 두 다항식 $(1+2x+3x^2+4x^3)^3$, $(1+2x+3x^2+4x^3+5x^4)^3$의 x^3의 계수를 각각 a, b라 할 때, $a-b$의 값을 구하면?

① -21 ② -15 ③ -5 ④ -1 ⑤ 0

해설

$(1+2x+3x^2+4x^3+5x^4)^3$의 전개식에서
x^4항의 계수는 x^3의 계수와는 관계가 없다.
따라서 $(1+2x+3x^2+4x^3)^3$의 전개식에서 x^3의 계수와 $(1+2x+3x^2+4x^3+5x^4)^3$의 전개식에서 x^3의 계수는 같다.
$\therefore\ a=b \quad \therefore\ a-b=0$

6. 다항식 $f(x)$를 $x-3$으로 나누었을 때의 몫이 $Q(x)$, 나머지가 1이고, 또 $Q(x)$를 $x-2$로 나누었을 때의 나머지가 -2이다. $f(x)$를 $x-2$로 나누었을 때의 나머지를 구하면?

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

해설

$f(x)=(x-3)Q(x)+1$

$Q(2)=-2$

$f(x)$를 $x-2$로 나눈 나머지는 $f(2)$이다.

$f(2)=(2-3)Q(2)+1$

$\quad=-1\times(-2)+1=3$

7. 최대공약수가 $x+1$ 이고, 최소공배수가 x^3+2x^2-x-2 일 때, 이차항의 계수가 1 인 두 다항식의 합을 구하면?

① $2x^2+3x+1$ ② x^2+3x+1 ③ $2x^2+3x+2$
④ x^3+3x-2 ⑤ x^2-x+1

해설

$x^3+2x^2-x-2=(x+1)(x-1)(x+2)$
∴두 다항식은 $(x+1)(x-1)$, $(x+1)(x+2)$ 이다.
∴두 다항식의 합은 $2x^2+3x+1$

8. 두 다항식 A, B 의 최대공약수 G 를 $A \bigcirc B$, 최소공배수 L 을 $A \bigstar B$ 로 나타내기로 할 때, 다음 계산 과정의 (가), (나), (다) 에 알맞은 것을 순서대로 적은 것은?

> $A = aG$, $B = bG$ (a, b 는 서로소)
> $A^2 \bigcirc AB = $ [(가)], $A^2 \bigcirc B^2 = $ [(나)]
> $\therefore \left(A^2 \bigcirc AB\right) \bigstar \left(A^2 \bigcirc B^2\right) = $ [(다)]

① A, G^2, A　② aG^2, G, A　③ A, AB, AG
④ aG^2, G^2, AG　⑤ G, G, AB

해설

(가) $= A^2 \bigcirc AB =$(G^2a^2 과 G^2ab 의 최대공약수)
$= aG^2$
(나) $= A^2 \bigcirc B^2 =$(G^2a^2과G^2b^2 의 최대공약수)
$= G^2$
(다) $= \left(A^2 \bigcirc AB\right) \bigstar \left(A^2 \bigcirc B^2\right)$
$=$ ((가) 와 (나) 의 최소공배수) $= aG^2 = AG$

9. 연립부등식 $\begin{cases} 5x-7<2x+2 \\ 2x+a>-x-4 \end{cases}$ 를 풀었더니 해가 $1<x<b$ 가 되었다. 이 때, $a-b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -10

해설

연립부등식을 각각 풀면
$5x-7<2x+2$ 에서 $x<3$ 이므로 $b=3$
$2x+a>-x-4$ 에서 $x>\dfrac{-4-a}{3}$ 이므로
$\dfrac{-4-a}{3}=1$
그러므로 $a=-7$ 이다.
$a-b$ 의 값은 $-7-3=-10$ 이다.

10. 다음 그림과 같이 두 점 A , B 가 수직선 상에 위치해 있다. 선분 AB 를 2 : 3으로 내분하는 점을 D , 선분 AB 를 2 : 3 으로 외분하는 점을 E , 선분 AB 를 3 : 2 로 내분하는 점을 F , 선분 AB 를 3 : 2 로 외분하는 점을 G 라 하자. 점 D, E, F, G 를 수직선 위에서 왼쪽부터 순서대로 적으시오.

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : 점 E

▷ 정답 : 점 D

▷ 정답 : 점 F

▷ 정답 : 점 G

해설

다음 그림에서 보듯이, 점의 순서는 E, D, F, G 이다.

11. 평행이동 $f:(x,\ y) \to (x-a^2,\ y-a)$ 에 의하여 직선 $3x+2y=1$ 이 직선 $3x+2y=0$ 으로 이동되었다. 이때, 양수 a 의 값은?

① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{2}{3}$ ④ 1 ⑤ $\frac{3}{2}$

해설

직선 $3x+2y=1$ 의 $x,\ y$ 에 각각

$x-(-a^2)=x+a^2,\ y-(-a)=y+a$ 를 대입하면

$3(x+a^2)+2(y+a)=1$

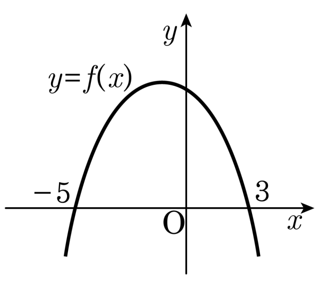
$3x+2y=1-2a-3a^2$

$\therefore\ 1-2a-3a^2=0$

$(3a-1)(a+1)=0$

$\therefore a=\frac{1}{3}\ (\because\ a>0)$

12. 이차함수 $y = f(x)$ 의 그래프가 다음 그림과 같을 때, 이차방정식 $f\left(\frac{x-4}{2}\right) = 0$ 의 두 근의 합은?



① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

해설

$f(x) = a(x+5)(x-3)$ $(a<0)$ 으로 놓으면

$$f\left(\frac{x-4}{2}\right) = a\left(\frac{x-4}{2}+5\right)\left(\frac{x-4}{2}-3\right)$$
$$= \frac{a}{4}(x+6)(x-10)$$이므로

$\frac{a}{4}(x+6)(x-10) = 0$ 에서

$x = -6$ 또는 $x = 10$

따라서 방정식 $f\left(\frac{x-4}{2}\right) = 0$ 의 두 근의 합은 4

13. 1200 명이 들어갈 수 있는 어느 소극장에서 입장권을 6000 원에 팔면 평균 600 명의 관중이 입장한다. 시장조사에 의하면, 입장료를 500 원씩 내리면 100 명씩 더 온다고 조사가 되었다. 이 때, 수입을 최대로 하기 위한 입장권의 가격은?

① 3000 원 ② 3500 원 ③ 4000 원
④ 4500 원 ⑤ 5000 원

해설

수입을 $f(x)$ 라고 하면,

$f(x) = (6000 - 500x)(600 + 100x)$
$= -50000x^2 + 300000x + 3600000$
$= -50000(x-3)^2 + 4050000$

$x = 3$ 일 때 최대이다.
즉, (입장권 가격)$= 6000 - 500 \times 3 = 4500$ 원.

14. 어느 학교 학생들이 운동장에서 야영을 하기 위해 텐트를 설치하였다. 한 텐트에 3 명씩 자면 12명이 남고, 5명씩 자면 텐트가 10개가 남는다고 할 때, 텐트의 수를 구하여라.

▶ 답: 개

▶ 답: 개

▶ 답: 개

▷ 정답: 31 개

▷ 정답: 32 개

▷ 정답: 33 개

해설

텐트 수를 x개, 학생 수를 $(3x+12)$ 명이라 하면

$5(x-11)+1 \le 3x+12 \le 5(x-11)+5$

$5(x-11)+1 \le 3x+12$에서

$5x-55+1 \le 3x+12$,

$2x \le 66$

$\therefore\ x \le 33$

$3x+12 \le 5(x-11)+5$에서

$3x+12 \le 5x-55+5$,

$2x \ge 62$

$\therefore\ x \ge 31$

$\therefore 31 \le x \le 33$

15. x보다 작거나 같은 정수 중에서 최대의 정수를 $[x]$, x보다 크거나 같은 정수 중에서 최소의 정수를 (x)로 나타낼 때, 방정식 $[x]+(x)=7$을 만족하는 x의 값을 모두 구하면?

① $\frac{7}{2}$　　② $3 \leq x \leq 4$　　③ $3 \leq x < 4$

④ $3 < x \leq 4$　　⑤ $3 < x < 4$

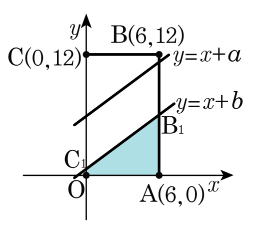
해설

$$[x] = \begin{cases} k & (x\text{가 정수 } k\text{일 때}) \\ k & (k < x < k+1\text{일 때}) \end{cases}$$

$$(x) = \begin{cases} k & (x\text{가 정수 } k\text{일 때}) \\ k+1 & (k < x < k+1\text{일 때}) \end{cases}$$

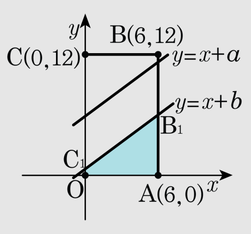
따라서, $[x]+(x)=7$ 이고
$[x]$, (x) 는 정수이므로
$[x]=3,\ (x)=4\ (\because\ [x] \leq (x))$
$\therefore\ 3 < x < 4$

16. 네 점 $\mathrm{O}(0,0)$, $\mathrm{A}(6,0)$, $\mathrm{B}(6,12)$, $\mathrm{C}(0,12)$를 꼭지점으로 하는 사각형 OABC가 있다. 그림과 같이 두 직선 $y=x+a$, $y=x+b$가 사각형 OABC의 넓이를 삼등분할 때, ab의 값은?



① 4 ② 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 8

해설



사각형 OABC의 넓이가 72이므로
사각형 $\mathrm{OAB_1C_1}$의 넓이는 24이다.
$\frac{1}{2}(b+6+b)\times 6=24$이므로 $b=1$
같은 방법으로 $a=5$
$\therefore\ ab=5$

17. 중심이 직선 $2x+y=0$ 위에 있고, 두 점 $(3,\ 0)$, $(0,\ 1)$ 을 지나는 원의 방정식은 ?

① $x^2+y^2-2x+4y-6=0$

② $x^2+y^2+2x-4y-6=0$

③ $5x^2+5y^2-8x+16y-21=0$

④ $5x^2+5y^2+8x-16y-21=0$

⑤ $x^2+y^2-4x+8y-12=0$

해설

구하는 원의 중심이 직선 $2x+y=0$ 위에 있으므로 중심을 $(a,\ -2a)$ 라 할 수 있다.

$(x-a)^2+(y+2a)^2=r^2$

점 $(3,\ 0)$ 을 지나므로,

$(3-a)^2+(2a)^2=r^2 \cdots$ ①

또, 점 $(0,\ 1)$ 을 지나므로,

$a^2+(1+2a)^2=r^2 \cdots$ ②

①, ②에서 $a=\frac{4}{5},\ r^2=\frac{37}{5}$

$\therefore \left(x-\frac{4}{5}\right)^2+\left(y+\frac{8}{5}\right)^2=\frac{37}{5}$

정리하면 $5x^2+5y^2-8x+16y-21=0$

18. 두 원 $x^2+y^2=1$, $x^2+(y-3)^2=4$ 의 공통접선의 방정식이 $y=mx+n$ 일 때, m^2+n^2 의 값은?(단, $m \neq 0$)

① 15　② 16　③ 17　④ 18　⑤ 19

해설

원 $x^2+y^2=1$ 의 중심 $(0,\ 0)$ 에서
직선 $y=mx+n$,
즉 $mx-y+n=0$ 에 이르는 거리가 1이므로

$$\frac{|n|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=1$$

$\therefore\ m^2=n^2-1\ \cdots$ ㉠
원 $x^2+(y-3)^2=4$ 의 중심 $(0,\ 3)$ 에서
직선 $mx-y+n=0$ 에 이르는 거리가 2이므로

$$\frac{|-3+n|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=2$$

$\therefore\ n^2-6n+9=4m^2+4\ \cdots$ ㉡
㉠ 을 ㉡ 에 대입하면,
$n^2-6n+9=4(n^2-1)+4,\ 3n^2+6n-9=0$
$n^2+2n-3=0,\ (n+3)(n-1)=0$
$\therefore\ n=-3$ 또는 $n=1$
이 때, $n=1$ 이면 $m=0$ 이 되므로 $n=-3$
$n=-3$ 을 ㉠ 에 대입하면 $m^2=8$
$\therefore\ m^2+n^2=8+9=17$

19. 방정식 $f(x,\ y)=0$이 나타내는 도형을 x축에 대하여 대칭이동시키는 것을 A, y축에 대하여 대칭 이동시키는 것을 B, 원점에 대하여 대칭 이동시키는 것을 C, 직선 $y=x$에 대하여 대칭 이동시키는 것을 D라 하자. 직선 $2x+y+1=0$ 을 $A \to B \to C \to D \to C \to B \to A$의 순서로 대칭 이동시킨 도형의 방정식은? (단, $A \to B$는 A에 의하여 대칭 이동시킨 후 다시 B에 의하여 대칭 이동시키는 것을 뜻한다.)

① $2x+y+1=0$　② $2x+y-1=0$　③ $x+2y-1=0$
④ $x+2y+1=0$　⑤ $x-2y-1=0$

해설

$2x+y+1=0$을 A(x축 대칭) 하면 $2x-y+1=0$
B(y축 대칭) 하면 $-2x-y+1=0$
C(원점 대칭) 하면 $2x+y+1=0$이므로
$A \to B \to C$, $C \to B \to A$에 의하여 도형은 자기 자신으로 옮겨진다.
$2x+y+1=0$을 D(직선 $y=x$ 대칭) 하면 $2y+x+1=0$
$\therefore x+2y+1=0$

20. x의 이차방정식 $x^2 + 2(k-1)x + 2(k^2-1) = 0$의 두 근 중 적어도 하나가 양이 되기 위한 실수 k의 최솟값을 구하면?

① -5　　② -4　　③ -3　　④ -2　　⑤ -1

해설

두 근을 α, β라 하면

(i) 두 근이 모두 양수일 때

$\alpha + \beta = -2(k-1) > 0,\ \alpha\beta = 2(k^2-1) > 0,$

$\frac{D}{4} = (k-1)^2 - 2(k^2-1) \geq 0$

이들의 공통 범위를 구하면

$-3 \leq k < -1 \cdots\cdots$ ㉠

(ii) 한 근이 양수, 한 근이 음수일 때,

$\alpha\beta = 2(k^2-1) < 0$

$\therefore\ -1 < k < 1 \cdots\cdots$ ㉡

(iii) 한 근이 양수, 한 근이 0일 때

$\alpha + \beta = -2(k-1) > 0,\ \alpha\beta = 2(k^2-1) = 0$

$\therefore\ k = -1 \cdots\cdots$ ㉢

구하는 k의 범위는 ㉠ 또는 ㉡ 또는 ㉢이므로

$-3 \leq k \leq 1$

$\therefore$ 최솟값 -3

21. 서로 다른 세 실수 a, b, c가 $a^3 - 6a = b^3 - 6b = c^3 - 6c = -1$을 만족시킬 때, $a^3 + b^3 + c^3$의 값은?

① 1　② -1　③ 3　④ -3　⑤ 6

해설

$a^3 - 6a = -1,\ b^3 - 6b = -1,\ c^3 - 6c = -1$이므로
$a,\ b,\ c$는 삼차방정식 $x^3 - 6x = -1$
즉, $x^3 - 6x + 1 = 0$의 세 근이다.
따라서, 근과 계수와의 관계에서 $a + b + c = 0,\ ab + bc + ca = 6,\ abc = -1$
$\therefore\ a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)$
에서 $a + b + c = 0$이므로 $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc = 3 \cdot (-1) = -3$

22. 자동차 판매회사에 다니는 차세일씨는 기본 연봉 1000 만원에 연간 자동차 판매 금액의 일정 비율을 추가로 지급받기로 하였다. 한 대당 가격이 1000 만원인 자동차를 4 대, 한 대당 가격이 2000 만원인 자동차를 3 대 판매할 것으로 예상되고 차세일씨가 연간 받고자 하는 급여의 총액이 1500 만원 이상이라고 할 때 연간 자동차 판매 금액의 최소 몇 % 를 추가로 지급해 달라고 요구해야 하는지 구하여라.(단, 세금은 계산하지 않는다.)

▶ 답: ________ %

▷ 정답: 5 %

해설

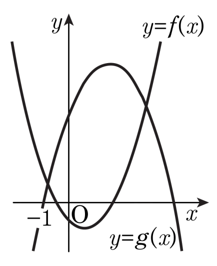
판매 금액의 일정 비율을 x% 라 하면

$1000 + (1000 \times 4 + 2000 \times 3) \times \frac{x}{100} \geq 1500$

$\therefore\ x \geq 5$

따라서 차세일씨는 자동차 판매금액의 최소 5% 를 추가로 지급해 달라고 요구해야 한다.

23. 이차항의 계수가 각각 1, -1인 두 이차함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프는 다음의 그림과 같다. 부등식 $f(x)-g(x) \le 0$의 해가 $-1 \le x \le 3$이고 $f(2)=1$일 때, $g(1)$의 값은?

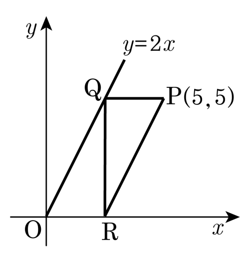


① 4　② 5　③ 6　④ 7　⑤ 8

해설

$y=f(x)$의 y절편이 -1이므로 $f(x)=x^2+ax-1$로 놓을 수 있다.
$f(2)=2a+3=1$에서 $a=-1$
$\therefore f(x)=x^2-x-1$
$g(x)=-x^2+bx+c$로 놓으면 $f(x)-g(x) \le 0$의 해가 $-1 \le x \le 3$이므로
$f(x)-g(x) = 2x^2-(1+b)x-1-c = 2(x+1)(x-3) = 2x^2-4x-6$
따라서, $1+b=4$, $-1-c=-6$에서
$b=3$, $c=5$
$\therefore g(x)=-x^2+3x+5$
$\therefore g(1)=7$

24. 다음 그림에서 점 $\mathrm{P}(5,5)$ 와 직선 $y=2x$ 위의 점 Q, x 축 위의 점 R 에 대하여 $\triangle\mathrm{PQR}$ 의 둘레의 길이의 최솟값은?



① $4\sqrt{10}$ ② $8\sqrt{2}$ ③ $5\sqrt{5}$

④ $2\sqrt{29}$ ⑤ 2

해설

$\overline{\mathrm{PQ}}+\overline{\mathrm{QR}}+\overline{\mathrm{RP}}$ 의 최솟값은 P 를 $y=2x$ 에 대해 대칭시킨 P' 와 x축에 대해 대칭이동시킨 $\mathrm{P}''(5,-5)$ 사이 거리와 같다.

$\mathrm{P}'=(a,b)$ 라하면 $\overline{\mathrm{PP}'}$ 은 $y=2x$에 수직이고

$\overline{\mathrm{PP}'}$ 의 중점은 $y=2x$ 위에 있다

$\therefore\ \mathrm{P}'=(1,\ 7)$

$\therefore\ \overline{\mathrm{PQ}}+\overline{\mathrm{QR}}+\overline{\mathrm{PR}}\geq\overline{\mathrm{P}'\mathrm{P}''}=\sqrt{4^2+12^2}=4\sqrt{10}$

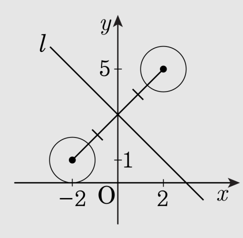
25. 두 원 $(x+2)^2+(y-1)^2=1$, $(x-2)^2+(y-5)^2=1$ 은 직선 l 에 대하여 서로 대칭이다. 직선 l 의 방정식은?

① $y=-2x+3$ ② $y=-x+2$ ③ $y=x+3$

④ $y=-x+3$ ⑤ $y=2x-1$

해설

두 원의 중심 $(-2,\ 1)$, $(2,\ 5)$ 는 직선 l 에 대하여 대칭이므로 직선 l 은 두 원의 중심을 연결한 선분의 수직이등분선이다.



따라서 직선l 의 방정식을 $y=ax+b$ 라 하면

ⅰ) 두 원의 중심을 지나는 직선의 기울기가

$\dfrac{5-1}{2-(-2)}=1$ 이므로

$a=-1$

ⅱ) 두 원의 중심을 연결한 선분의 중점의 좌표는

$\left(\dfrac{-2+2}{2}, \dfrac{5+1}{2}\right)$ 에서 $(0,3)$ 이므로 $b=3$ 이다.

따라서 구하는 직선의 방정식은 $y=-x+3$ 이다.