

1. 두 다항식 A , B 에 대하여 연산 $A \ominus B$ 와 $A \otimes B$ 을 다음과 같이 정의하기로 한다.

$$A \ominus B = A - 3B, A \otimes B = (A + B)B$$

$P = 2x^3 + 2x^2y + 3xy^2 - y^3$, $Q = x^3 + x^2y + xy^2$ 이라 할 때,
 $(P \ominus Q) \otimes Q$ 를 x, y 에 관한 다항식으로 나타내면?

① $x^4y^2 + xy^5$ ② $x^4y^2 - xy^5$ ③ $x^3y^2 - xy^4$

④ $x^3y^2 + xy^4$ ⑤ $2x^3y^2 - xy^4$

해설

정의에 따라 $(P \ominus Q) \otimes Q$ 를 변형하면

$$\begin{aligned} (P \ominus Q) \otimes Q &= (P - 3Q) \otimes Q \\ &= (P - 3Q + Q)Q \\ &= (P - 2Q)Q \quad \dots \textcircled{1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P - 2Q &= 2x^3 + 2x^2y + 3xy^2 - y^3 - 2(x^3 + x^2y + xy^2) \\ &= xy^2 - y^3 \end{aligned}$$

이므로 ①식은

$$\begin{aligned} (P \ominus Q) \otimes Q &= (xy^2 - y^3)(x^3 + x^2y + xy^2) \\ &= x^4y^2 + x^3y^3 + x^2y^4 - x^3y^3 \\ &\quad - x^2y^4 - xy^5 \\ &= x^4y^2 - xy^5 \end{aligned}$$

2. 다항식 $x^3 - 2$ 를 $x^2 - 2$ 로 나눈 나머지는?

- ① 2 ② -2 ③ $-2x - 2$
④ $2x + 2$ ⑤ $2x - 2$

해설

$$\frac{x^3 - 2}{x^2 - 2} = \frac{x^3 - 2x + 2x - 2}{x^2 - 2} = x + \frac{2x - 2}{x^2 - 2}$$

\therefore 나머지는 $2x - 2$

3. x 에 대한 다항식 $A = 2x^3 + 5x^2 + 4$ 를 다항식 B 로 나눌 때, 몫이 $2x + 1$ 이고, 나머지가 $-6x + 2$ 이다. 이 때, 다항식 B 를 구하면?

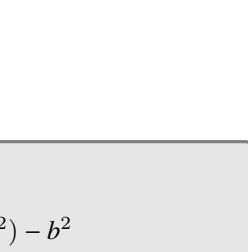
① $x^2 + 2x + 2$ ② $x^2 + x + 2$ ③ $x^2 - x + 2$

④ $x^2 - 2x + 2$ ⑤ $x^2 - 3x + 2$

해설

$$\begin{aligned} A &= B(2x + 1) - 6x + 2 \text{에서} \\ B(2x + 1) &= 2x^3 + 5x^2 + 6x + 2 \\ \therefore B &= (2x^3 + 5x^2 + 6x + 2) \div (2x + 1) \\ &= x^2 + 2x + 2 \end{aligned}$$

4. 다음 그림의 사각형 AGHE, 사각형 EFCD는 정사각형이고, $\overline{AD} = a$, $\overline{AB} = b$ 일때, 사각형 GBFH의 넓이는?



- ① $a^2 - 2ab - b^2$ ② $a^2 + 3b^2 - 2ab$
③ $-a^2 + 3ab - 2b^2$ ④ $-a^2 + 3ab - b^2$
⑤ $-a^2 + 2ab - b^2$

해설

$$\begin{aligned}\square \text{GBFH} &= \square \text{ABCD} - \square \text{AGHE} - \square \text{EFCD} \\ &= ab - (a-b)^2 - b^2 = ab - (a^2 - 2ab + b^2) - b^2 \\ &= -a^2 + 3ab - 2b^2\end{aligned}$$

5. 다음 곱셈공식을 전개한 것 중 바른 것은?

① $(x - y - 1)^2 = x^2 + y^2 + 1 - 2xy - 2x - 2y$

② $(a + b)^2(a - b)^2 = a^4 - 2a^2b^2 + b^4$

③ $(-x + 3)^3 = x^3 - 9x^2 + 27x - 27$

④ $(a - b)(a^2 + ab - b^2) = a^3 - b^3$

⑤ $(p - 1)(p + 1)(p^2 + 1)(p^4 + 1) = p^{16} - 1$

해설

① $(x - y - 1)^2 = x^2 + y^2 + 1 - 2xy - 2x - 2y$

③ $(-x + 3)^3 = -x^3 + 9x^2 - 27x + 27$

④ $(a - b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$

⑤ $(p - 1)(p + 1)(p^2 + 1)(p^4 + 1) = p^8 - 1$

6. $(x+y)^n$ 을 전개할 때 항의 개수는 $n+1$ 개이다. 다항식 $\boxed{(2a-3b)^3(2a+3b)^3}$ ⁴을 전개할 때, 항의 개수를 구하면 ?

- ① 7개 ② 8개 ③ 12개 ④ 13개 ⑤ 64개

해설

$$\begin{aligned} & \boxed{(2a-3b)^3(2a+3b)^3}^4 \\ &= \boxed{(4a^2-9b^2)^3}^4 \\ &= (4a^2-9b^2)^{12} \\ &\therefore (4a^2-9b^2)^{12} \text{의 항의 개수는 } 13 \text{개이다.} \end{aligned}$$

7. $(x^3 + ax + 2)(x^2 + bx + 2)$ 를 전개했을 때, x^2 과 x^3 의 계수를 모두 0
이 되게 하는 상수 a, b 에 대하여 $a + b$ 의 값은?

① -2 ② -1 ③ 1 ④ 2 ⑤ $\frac{3}{2}$

해설

$$(x^3 + ax + 2)(x^2 + bx + 2)$$

$$= x^5 + bx^4 + (a+2)x^3 + (ab+2)x^2 + (2a+2b)x + 4$$

$(x^2 \text{의 계수}) = (x^3 \text{의 계수}) = 0$ 이므로

$$ab + 2 = 0, a + 2 = 0$$

따라서 $a = -2, b = 1$

$$\therefore a + b = -1$$

8. $a^2 + b^2 + c^2 = 9$, $ab + bc + ca = 9$, $a + b + c$ 값은?

- ① $-3\sqrt{2}$ ② $-2\sqrt{3}$ ③ $\pm 3\sqrt{3}$
④ $\pm 3\sqrt{2}$ ⑤ $\sqrt{6}$

해설

$$\begin{aligned}(a+b+c)^2 &= a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca) \\&= 9 + 18 = 27\end{aligned}$$

$$\therefore a+b+c = \pm 3\sqrt{3}$$

9. 두 다항식 A, B 에 대하여 연산 Δ, ∇ 를 $A \Delta B = 2A + B, A \nabla B = A - 3B$ 로 정의한다.

$A = 2 + 3x^2 - x^3, B = x^2 + 3x + 1$ 일 때 $A \nabla (B \Delta A)$ 를 구하면?

① $2x^3 - 18x - 10$

② $2x^3 - 12x^2 - 18x - 10$

③ $2x^3 + 12x^2 + 18x + 10$

④ $2x^3 + 12x^2 + 18x - 10$

⑤ $2x^3 - 12x^2 + 18x + 10$

해설

$$A \nabla (B \Delta A) = A \nabla (2B + A)$$
$$= A - 3(2B + A) = -2A - 6B$$

위와 같이 식을 간단히 정리한 후 A, B 에 대입하여 정리한다.

10. $x + y + z = 1$, $xy + yz + zx = 2$, $xyz = 3$ 일 때, $(x+y)(y+z)(z+x)$ 의 값을 구하면?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$$\begin{aligned}x + y + z &= 1 \quad | \cdot xyz \\x + y &= 1 - z \\y + z &= 1 - x \\z + x &= 1 - y \\(x + y)(y + z)(z + x) &= (1 - z)(1 - x)(1 - y) \\&= 1 - (x + y + z) + (xy + yz + zx) - xyz \\&= 1 - 1 + 2 - 3 = -1\end{aligned}$$

11. $x + y + z = 1$, $xy + yz + zx = 2$, $xyz = 3$ 일 때, $(x+1)(y+1)(z+1)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 7

해설

$$\begin{aligned}(x+1)(y+1)(z+1) \\= xyz + xy + yz + zx + x + y + z + 1 \\= 7\end{aligned}$$

12. 다음 중 식의 전개가 바르지 않은 것을 고르면?

- ① $(1 - x)(1 + x + x^2) = 1 - x^3$
② $(x^2 + xy + y^2)(x^2 - xy + y^2) = x^4 + x^2y^2 + y^4$
③ $(x - 3)(x - 2)(x + 1)(x + 2) = x^4 - 8x^2 + 12$
④ $(a - b)(a + b)(a^2 + b^2)(a^4 + b^4) = a^8 - b^8$
⑤ $(a + b - c)(a - b + c) = a^2 - b^2 - c^2 + 2bc$

해설

$$\begin{aligned} & (x - 3)(x - 2)(x + 1)(x + 2) \\ &= (x^2 - x - 6)(x^2 - x - 2) \\ & x^2 - x = Y \text{ 라 놓자.} \\ & (Y - 6)(Y - 2) = Y^2 - 8Y + 12 \\ &= (x^2 - x)^2 - 8(x^2 - x) + 12 \\ &= x^4 - 2x^3 - 7x^2 + 8x + 12 \end{aligned}$$

13. 다음 식 중에서 옳지 않은 것을 고르면?

- ① $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$
- ② $(a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca) = a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$
- ③ $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
- ④ $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$
- ⑤ $(a^2 + a + 1)(a^2 - a + 1) = a^4 - a^2 + 1$

해설

$$\begin{aligned} \textcircled{5} \quad (a^2 + a + 1)(a^2 - a + 1) &= (a^2 + 1)^2 - a^2 \\ &= a^4 + a^2 + 1 \end{aligned}$$

14. 다음 식을 전개한 것 중 옳은 것을 고르면?

- ① $(x - y - z)^2 = x^2 - y^2 - z^2 - 2xy + 2yz - 2zx$
- ② $(3x - 2y)^3 = 27x^3 - 54x^2y + 18xy^2 - 8y^3$
- ③ $(x + y)(x - y)(x^2 + xy - y^2)(x^2 - xy + y^2) = x^9 - y^9$
- ④ $(x^2 - 2xy + 2y^2)(x^2 + 2xy + 2y^2) = x^4 + 4y^4$
- ⑤ $(x + y - 1)(x^2 + y^2 - xy + 2x + 2y + 1) = x^3 + y^3 - 3xy - 1$

해설

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \quad & (x - y - z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 2yz - 2zx \\ \textcircled{2} \quad & (3x - 2y)^3 = 27x^3 - 54x^2y + 36xy^2 - 8y^3 \\ \textcircled{3} \quad & (x + y)(x - y)(x^2 + xy + y^2)(x^2 - xy + y^2) \\ & \quad = x^6 - y^6 \\ \textcircled{5} \quad & (x + y - 1)(x^2 + y^2 - xy + x + y + 1) \\ & \quad = x^3 + y^3 - 3xy - 1 \end{aligned}$$

15. $(x - 1)(x + 2)(x - 3)(x + 4)$ 를 전개할 때, 각 항의 계수의 총합을 a , 상수항을 b 라 할 때, $a + b$ 의 값을 구하면?

① 8 ② 15 ③ 24 ④ 36 ⑤ 47

해설

$$\begin{aligned}(x - 1)(x + 2)(x - 3)(x + 4) \\&= (x^2 + x - 2)(x^2 + x - 12)(x^2 + x = X(\bar{x} \text{한})) \\&= (X - 2)(X - 12) \\&= X^2 - 14X + 24 \\&= (x^2 + x)^2 - 14(x^2 + x) + 24 \\&= x^4 + 2x^3 - 13x^2 - 14x + 24 \\&\therefore a = 1 + 2 - 13 - 14 + 24 = 0, b = 24 \\&\therefore a + b = 0 + 24 = 24\end{aligned}$$

해설

⑦ 각 항 계수의 총합 구하기

$x = 1$ 대입, $a = 0$

⑧ 상수항 구하기

$x = 0$ 대입, $b = 24$

16. $(a+b)(a^2-ab+b^2)(a^3-b^3)$ 의 전개식으로 옳은 것은?

- ① $a^3 + b^3$ ② $a^6 + b^6$ ③ $a^6 - b^6$
④ $a^9 + b^9$ ⑤ $a^9 - b^9$

해설

$$(준 식) = (a^3 + b^3)(a^3 - b^3) = a^6 - b^6$$

17. $P = (2+1)(2^2+1)(2^4+1)(2^8+1)(2^{16}+1)$ 의 값을 구하면?

- ① $2^{32}-1$ ② $2^{32}+1$ ③ $2^{31}-1$
④ $2^{31}+1$ ⑤ $2^{17}-1$

해설

주어진 식에 $(2-1)=1$ 을 곱해도 식은 성립하므로

$$P = (2-1)(2+1)(2^2+1)(2^4+1)(2^8+1)(2^{16}+1)$$

$$= (2^2-1)(2^2+1)(2^4+1)(2^8+1)(2^{16}+1)$$

$$= (2^4-1)(2^4+1)(2^8+1)(2^{16}+1)$$

$$= \vdots$$

$$= (2^{16}-1)(2^{16}+1)$$

$$= 2^{32}-1$$

18. 두 다항식 $(1+x+x^2+x^3)^3$, $(1+x+x^2+x^3+x^4)^3$ 의 x^3 의 계수를 각각 a , b 라 할 때, $a-b$ 의 값은?

- ① $4^3 - 5^3$ ② $3^3 - 3^4$ ③ 0
④ 1 ⑤ -1

해설

두 다항식이 $1+x+x^2+x^3$ 을 포함하고 있으므로 $1+x+x^2+x^3 =$

A 라 놓으면

$$\begin{aligned} & (1+x+x^2+x^3+x^4)^3 \\ &= (A+x^4)^3 \\ &= A^3 + 3A^2x^4 + 3Ax^8 + x^{12} \\ &= A^3 + (3A^2 + 3Ax^4 + x^8)x^4 \end{aligned}$$

이 때 $(3A^2 + 3Ax^4 + x^8)x^4$ 은 x^3 항을 포함하고 있지 않으므로

두 다항식의 x^3 의 계수는 같다.

$$\therefore a-b=0$$

19. 세 실수 a, b, c 에 대하여 $a + b + c = 2$, $a^2 + b^2 + c^2 = 6$, $abc = -1$ 일 때, $a^3 + b^3 + c^3$ 의 값은?

① 11 ② 12 ③ 13 ④ 14 ⑤ 15

해설

$$\begin{aligned}(a+b+c)^2 &= a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca) \\ ab + bc + ca &= -1 \\ a^3 + b^3 + c^3 \\ &= (a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca) + 3abc \\ &= 2 \times (6 - (-1)) - 3 = 11\end{aligned}$$

해설

- $$x^2 - x + 1 = 0 \text{ 를 } x \text{ 도 나누어 정리한다.}$$

$$x + \frac{1}{x} = 1$$

1

21. 세 실수 a, b, c 가 다음 세 조건을 만족한다.

$$a + b + c = 1, ab + bc + ca = 1, abc = 1$$

○] 때, $(a + b)(b + c)(c + a)$ 의 값은?

① 0

② 1

③ 2

④ 3

⑤ 4

해설

$$\begin{aligned} a + b + c &= 1 \text{에서} \\ a + b &= 1 - c, b + c = 1 - a, c + a = 1 - b \\ (a + b)(b + c)(c + a) &= (1 - c)(1 - a)(1 - b) \\ &= 1 - (a + b + c) + (ab + bc + ca) - abc \\ &= 1 - 1 + 1 - 1 = 0 \end{aligned}$$

22. $x+y+z = 4$, $xy+yz+zx = 1$, $xyz = 2$ 일 때, $(xy+yz)(yz+zx)(zx+xy)$ 의 값을 구하면?

- ① 16 ② 8 ③ 4 ④ 2 ⑤ 1

해설

$$\begin{aligned} & (xy + yz)(yz + zx)(zx + xy) \text{ 을} \\ & xy + yz + zx = 1 \text{ 을 이용하여 변형하면} \\ & (xy + yz)(yz + zx)(zx + xy) \\ & = (1 - zx)(1 - xy)(1 - yz) \\ & = 1 - (xy + yz + zx) + (x^2yz + xy^2z + xyz^2) - (xyz)^2 \\ & = 1 - (xy + yz + zx) + xyz(x + y + z) - (xyz)^2 \\ & = 1 - 1 + 2 \cdot 4 - 4 \\ & = 4 \end{aligned}$$

※ 위에서 아래의 전개식을 이용하였다.

$$(x - a)(x - b)(x - c)$$

$$= x^3 - (a + b + c)x^2 + (ab + bc + ca)x - abc$$

23. $P = (2+1)(2^2+1)(2^4+1)(2^8+1)(2^{16}+1)$ 의 값을 구하면?

- ① $2^{32}-1$ ② $2^{32}+1$ ③ $2^{31}-1$
④ $2^{31}+1$ ⑤ $2^{17}-1$

해설

주어진 식에 $(2-1)=1$ 을 곱해도 값은 변하지 않으므로

$$P = (2-1)(2+1)(2^2+1)(2^4+1)(2^8+1)(2^{16}+1)$$

$$= (2^2-1)(2^2+1)(2^4+1)(2^8+1)(2^{16}+1)$$

$$= (2^4-1)(2^4+1)(2^8+1)(2^{16}+1)$$

$$= \vdots$$

$$= (2^{16}-1)(2^{16}+1)$$

$$= 2^{32}-1$$

24. $a = (3+1)(3^2+1)(3^4+1)(3^8+1) \cdots (3^{1024}+1)$ 이라고 할 때 곱셈

공식을 이용하여 a 의 값을 지수의 형태로 나타내면 $\frac{1}{k}(3^l+m)$ 이다.

○] 때, $k+l+m$ 의 값을 구하면?

- ① 2046 ② 2047 ③ 2048 ④ 2049 ⑤ 2050

해설

$$a = (3+1)(3^2+1) \cdots (3^{1024}+1)$$

양변에 $(3-1)$ 을 곱하면

$$(3-1)a = (3-1)(3+1)(3^2+1)(3^4+1) \cdots (3^{1024}+1)$$

$$= (3^2-1)(3^4+1) \cdots (3^{1024}+1)$$

$$= (3^8-1) \cdots (3^{1024}+1)$$

⋮

$$= (3^{2048}-1)$$

양변을 2로 나누면

$$a = \frac{1}{2}(3^{2048}-1)$$

$$\therefore k=2, l=2048, m=-1$$

$$\therefore k+l+m=2049$$

25. 다음 식의 분모를 0으로 만들지 않는 모든 실수 x 에 대하여 다음 식이 성립할 때, $a_1 + a_2 + \dots + a_{10}$ 의 값은?

$$\frac{1}{(x-1)(x-2)\cdots(x-10)} = \frac{a_1}{x-1} + \frac{a_2}{x-2} + \cdots + \frac{a_{10}}{x-10}$$

- ① 0 ② -1 ③ 1 ④ -10 ⑤ 10

해설

우변을 통분하여 x 에 대한 내림차순으로 정리하면,

$$(우변) = \frac{(a_1 + a_2 + \cdots + a_{10})x^9 + \cdots}{(x-1)(x-2)\cdots(x-10)}$$

양변의 계수를 비교하면

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_{10} = 0$$

26. 삼각형의 세 변의 길이 a , b , c 에 대하여 $(a+b-c)(a-b+c) = b(b+2c) + (c+a)(c-a)$ 가 성립할 때, 이 삼각형은 어떤 삼각형인가?

- ① 직각삼각형 ② 이등변삼각형 ③ 정삼각형
④ 예각삼각형 ⑤ 둔각삼각형

해설

$$(a+b-c)(a-b+c) = b(b+2c) + (c+a)(c-a) \text{에서}$$

$$\{a+(b-c)\} \{a-(b-c)\} = b^2 + 2bc + c^2 - a^2$$

$$a^2 - (b-c)^2 = -a^2 + b^2 + c^2 + 2bc$$

$$2a^2 = 2b^2 + 2c^2$$

$$\therefore a^2 = b^2 + c^2$$

따라서, 이 삼각형은 빗변의 길이가 a 인 직각삼각형이다.

27. 세 변의 길이가 a , b , c 인 $\triangle ABC$ 에 대하여 $a^2 - ab + b^2 = (a + b - c)c$ 인 관계가 성립할 때, $\triangle ABC$ 는 어떤 삼각형인지 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 정삼각형

해설

$$a^2 - ab + b^2 = (a + b - c)c \text{에서 } a^2 - ab + b^2 = ac + bc - c^2$$

$$a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} \left\{ (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 \right\} = 0$$

$$\therefore a = b = c$$

따라서, $\triangle ABC$ 는 정삼각형이다.

28. 실수 x 가 $x^2 - 3x + 1 = 0$ 을 만족할 때, $x^3 + \frac{1}{x^3}$ 의 값을 구하면?

- ① 18 ② 19 ③ 20 ④ 21 ⑤ 22

해설

준식의 양변을 x 로 나누면

$$x + \frac{1}{x} = 3$$

$$\begin{aligned}x^3 + \frac{1}{x^3} &= \left(x + \frac{1}{x}\right)^3 - 3\left(x + \frac{1}{x}\right) \\&= 3^3 - 3 \times 3 = 18\end{aligned}$$

29. $a + b + c = 7$, $a^2 + b^2 + c^2 = 21$, $abc = 8$ 일 때, $a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2$ 의 값은?

- ① 26 ② 48 ③ 84 ④ 96 ⑤ 112

해설

$$\begin{aligned}(a+b+c)^2 &= a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca) \\49 &= 21 + 2(ab + bc + ca) \\∴ ab + bc + ca &= 14 \\a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 &= (ab + bc + ca)^2 - 2abc(a + b + c) \\&= (14)^2 - 2(8 \times 7) \\&= 84\end{aligned}$$

30. $x + y = 2$, $x^3 + y^3 = 14$ 일 때, 다음 중 옳지 않은 것은?

- ① $xy = -1$ ② $x^2 + y^2 = 6$ ③ $x^4 + y^4 = 34$
④ $x^5 + y^5 = 86$ ⑤ $x^6 + y^6 = 198$

해설

① $x^3 + y^3 = (x + y)^3 - 3xy(x + y)$ 에서
 $14 = 2^3 - 3xy \times 2$
 $\therefore xy = -1$

② $x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy$ 에서
 $x^2 + y^2 = 2^2 - 2(-1) = 6$

③ $x^4 + y^4 = (x^2 + y^2)^2 - 2x^2y^2$ 에서
 $x^4 + y^4 = 6^2 - 2(-1)^2 = 34$

④ $x^5 + y^5 = (x^2 + y^2)(x^3 + y^3) - x^2y^2(x + y)$ 에서
 $x^5 + y^5 = 6 \times 14 - (-1)^2 \times 2 = 82 \neq 86$

⑤ $x^6 + y^6 = (x^3 + y^3)^2 - 2x^3y^3$ 에서
 $x^6 + y^6 = 14^2 - 2(-1)^3 = 198$