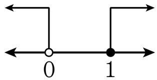
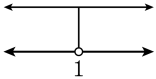
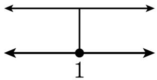
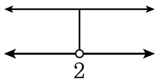
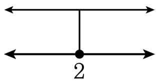
1. 연립부등식 $\begin{cases} 8-3x \le 2 \\ 3x-3 \le 3 \end{cases}$ 의 해를 옳게 구하고 수직선상의 그림을 바르게 그린 것은?

① 해가 없다. 

② 1 , 

③ 1 , 

④ 2 , 

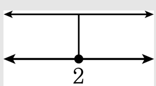
⑤ 2 , 

해설

$\begin{cases} 8-3x \le 2 \\ 3x-3 \le 3 \end{cases}$ 을 정리하면,

$\begin{cases} -3x \le -6 \\ 3x \le 6 \end{cases}$ 이고

간단히 하면 $\begin{cases} x \ge 2 \\ x \le 2 \end{cases}$ 이다.

수직선 위에 그리면  이 되고 해는 2 이다.

2. x에 관한 연립부등식 $-1 \le -\frac{1}{2}x - a \le 3$의 해가 $-2 \le x \le 6$일 때, a의 값은?

① 2 ② 3 ③ 4 ④ -3 ⑤ -2

해설

(ⅰ) $-1 \le -\frac{1}{2}x - a,\ x \le -2a + 2$

(ⅱ) $-\frac{1}{2}x - a \le 3$, $x \ge -2a - 6$

$-2a - 6 \le x \le -2a + 2$와 $-2 \le x \le 6$이 같으므로

$-2a - 6 = -2,\ a = -2$

$-2a + 2 = 6,\ a = -2$

$\therefore\ a = -2$

3. 1 개에 1600 원하는 열쇠 고리와 1 개에 2,000 원 하는 핸드폰 줄을 합쳐서 20 개를 사려고 한다. 전체 가격이 34000 원 보다 크고 35000 원 보다 작게 하려고 할 때, 열쇠 고리는 최대 몇 개를 사야 하는지 구하여라.

▶ 답 : ______ 개

▷ 정답 : 14 개

해설

열쇠 고리의 수를 x 개라고 하면 핸드폰 줄의 수는 $(20-x)$ 개이다. 따라서 열쇠 고리를 x 개 사고 핸드폰 줄을 $(20-x)$ 개 샀을 때의 전체 가격은 $1600x+2000(20-x)$ 이다. 전체 가격이 34,000 원 보다 크고 35,000 원 보다 작으므로 $34000 < 1600x+2000(20-x) < 35000$ 이다. 이를 연립 부등식으로 나타내면, $\begin{cases} 1600x+2000(20-x) > 34000 \\ 1600x+2000(20-x) < 35000 \end{cases}$ 이므로 간단히 하면,

$\begin{cases} x < 15 \\ x > \dfrac{50}{4} \end{cases}$ 이다. 따라서 $\dfrac{25}{2} < x < 15$ 이고, $\dfrac{25}{2} = 12.5$ 이므로,

열쇠 고리는 13 개 또는 14 개를 사야 한다.

따라서 최대 14개를 사야 한다.

4. 8% 설탕물 100 g 이 있다. 이 설탕물에서 물을 증발시켜 농도를 15% 이상 20% 이하로 만들려고 한다. 이 때 증발시켜야 하는 물의 양이 <u>아닌</u> 것은?

① 45 g ② 48 g ③ 50 g ④ 55 g ⑤ 60 g

해설

8% 의 소금물 100 g 의 소금의 양은

$\frac{8}{100} \times 100 = 8(\text{g})$ 이다.

따라서 물 x g 을 증발시켰을 때의 농도를 나타내면 $\frac{8}{100-x} \times 100$ 이다.

이 값이 15% 이상 20% 이하 이므로,

$15 \le \frac{8}{100-x} \times 100 \le 20$ 이고,

이를 연립방정식으로 나타내면

$$\begin{cases} 15 \le \frac{8}{100-x} \times 100 \\ \frac{8}{100-x} \times 100 \le 20 \end{cases}$$

이다. 간단히 나타내면

$$\begin{cases} x \ge \frac{140}{3} \\ x \le 60 \end{cases}$$

이다. 따라서 x 의 범위는 $\frac{140}{3} \le x \le 60$ 이다.

5. 부등식 $|x-k| \le 3$을 만족하는 x의 값 중에서 최댓값과 최솟값의 곱이 9일 때, 양수 k의 값은?

① $\sqrt{2}$ ② 2 ③ $3\sqrt{2}$ ④ 4 ⑤ $5\sqrt{2}$

해설

$|x-k| \le 3$에서 $-3 \le x-k \le 3$,

$-3+k \le x \le 3+k$

따라서 x의 최댓값은 $3+k$,

최솟값은 $-3+k$이므로

$(-3+k)(3+k)=9$

$k^2-9=9$

$k^2=18 \quad \therefore k=\pm 3\sqrt{2}$

k는 양수이므로 $3\sqrt{2}$

6. 연립부등식 $\begin{cases} \dfrac{x}{2}-\dfrac{a}{4} \geq \dfrac{x}{4}-\dfrac{1}{8} \\ 3x-1 \geq 5x-7 \end{cases}$ 을 만족하는 정수 x가 3개일 때, 상수 a의 값의 범위는?

① $-\dfrac{1}{2} < a \leq \dfrac{1}{2}$ ② $-\dfrac{1}{2} \leq a < \dfrac{1}{2}$ ③ $0 \leq a < 1$

④ $\dfrac{1}{2} < a \leq \dfrac{3}{2}$ ⑤ $\dfrac{1}{2} \leq a < \dfrac{3}{2}$

해설

$\dfrac{x}{2}-\dfrac{a}{4} \geq \dfrac{x}{4}-\dfrac{1}{8}$ 에서 $x \geq a-\dfrac{1}{2}$

$3x-1 \geq 5x-7$ 에서 $x \leq 3$

$\therefore\ a-\dfrac{1}{2} \leq x \leq 3$

연립부등식을 만족하는 정수 x가 3개이려면

$0 < a-\dfrac{1}{2} \leq 1$

$\therefore\ \dfrac{1}{2} < a \leq \dfrac{3}{2}$

7. $3x-8<-(2x+1)$, $\dfrac{x+3}{4} \le \dfrac{x-1}{2}$, $0.6(1-2x) \le 0.3x+1.2$을 만족하는 x의 개수는?

① 0개 ② 1개 ③ 2개 ④ 3개 ⑤ 4개

해설

$3x-8<-(2x+1)$

$\therefore\ x<1.4$

$\dfrac{x+3}{4} \le \dfrac{x-1}{2}$

$\therefore\ 5 \le x$

$0.6(1-2x) \le 0.3x+1.2$, x는 정수

$\therefore\ -0.4 \le x$

따라서 모두 만족하는 x는 없으므로 0개이다.

8. 연립부등식 $x+2<4$ 와 $5x-8<17$ 의 해를 구하면?

① $x<2$ ② $x>5$ ③ $2<x\leq 5$

④ $2\leq x<5$ ⑤ 해가 없다.

해설

$x+2<4,\ \ x<2$

$5x-8<17,\ \ x<5$

따라서 $x<2$

9. $\frac{x+3}{2}$의 절대값이 1보다 크고 4보다 작을 때, 만족하는 정수 x의 개수를 구하여라.

▶ 답 : ______ 개

▷ 정답 : 10 개

해설

(1) $1 < \frac{x+3}{2} < 4$일 때,

$2 < x+3 < 8$,

$-1 < x < 5$

$\therefore x = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4$

(2) $-4 < \frac{x+3}{2} < -1$일 때,

$-8 < x+3 < -2$,

$-11 < x < -5$

$\therefore x = -10,\ -9,\ -8,\ -7,\ -6$

따라서 만족하는 정수 x의 개수는 10개이다.

10. 연립부등식 $5x-3>a,\ 4x+3\le -x-2a$ 의 해가 존재하도록 상수 a 의 값의 범위를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $a<-2$

해설

주어진 부등식을

$$\begin{cases} 5x-3>a & \cdots ㉠ \\ 4x+3\le -x-2a & \cdots ㉡ \end{cases}$$

㉠에서 $x>\dfrac{a+3}{5}$

㉡에서 $x\le\dfrac{-2a-3}{5}$

해가 존재해야 하므로 $\dfrac{a+3}{5}<\dfrac{-2a-3}{5}$

$\therefore\ a<-2$

11. 다음 두 이차방정식

$$\begin{cases} x^2 + 4mx - (2m - 1) = 0 \\ x^2 + mx + (m + 1) = 0 \end{cases}$$

이 단 하나의 공통근을 가질 때, m의 값은?

① -1 ② 0 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

해설

공통근을 α라 하면

$\alpha^2 + 4m\alpha - (2m - 1) = 0 \cdots ㉠$

$\alpha^2 + m\alpha + (m + 1) = 0 \cdots ㉡$

㉠ $-$ ㉡하면

$3m\alpha - 3m = 0$

$3m(\alpha - 1) = 0 \quad \therefore\ m = 0,\ \alpha = 1$

$m = 0$일 때 두 방정식이 일치하므로

단 하나의 공통근이라는 조건에 부적합

$\alpha = 1$을 ㉡에 대입

$1 + m + m + 1 = 0 \quad \therefore\ m = -1$

12. 방정식 $2x^2-4xy+5y^2-8x-4y+20=0$ 을 만족하는 실수 x,y 의 값은?

① $x=2,\ y=4$　　② $x=4,\ y=2$　　③ $x=-1,\ y=2$

④ $x=2,\ y=-1$　　⑤ $x=-2,\ y=1$

해설

판별식을 이용하기 위해 준식을 x 에 관하여 정리하면,

$2x^2-4(y+2)x+5y^2-4y+20=0\cdots$ ①

①이 실근을 가지므로 $\dfrac{D}{4}\geq 0$ 에서

$4(y+2)^2-10y^2+8y-40\geq 0$

$6y^2-24y+24\leq 0$

$6(y^2-4y+4)\leq 0$

$6(y-2)^2\leq 0$　　$\therefore y=2$ ($\because$ y 는 실수)

$y=2$ 를 ①에 대입하면,

$2x^2-16x+32=0,\quad 2(x-4)^2=0$

$\therefore\ x=4$

13. 방정식 $xy + 4x - 2y - 11 = 0$을 만족하는 정수 x, y에 대하여 xy의 값이 아닌 것은?

① -15 ② -7 ③ -3 ④ 5 ⑤ 15

해설

$xy + 4x - 2y - 11 = 0$에서 $(x-2)(y+4) = 3$

x, y가 정수이므로

$(x-2,\ y+4) = (1, 3), (-1, -3), (3, 1), (-3, -1)$

$\therefore\ (x,\ y) = (3, -1), (1, -7), (5, -3), (-1, -5)$

$\therefore\ xy = -3, -7, -15, 5$

14. 연립방정식 $\begin{cases} x^2 - 3xy + 2y^2 = 0 \\ x^2 + 2y^2 = 12 \end{cases}$ 을 만족하는 x, y에 대하여 $x+y$ 값이 될 수 없는 것은?

① $3\sqrt{2}$ ② 4 ③ $-3\sqrt{2}$

④ -4 ⑤ $4\sqrt{2}$

해설

$x^2 - 3xy + 2y^2 = 0$에서

$(x-y)(x-2y) = 0 \quad \therefore x = y$ 또는 $x = 2y$

i) $x = y$ 일 때

$x^2 + 2y^2 = 3x^2 = 12$

$x = \pm 2,\ y = \pm 2$

ii) $x = 2y$ 일 때

$x^2 + 2y^2 = 6y^2 = 12$

$y = \pm\sqrt{2},\quad x = \pm 2\sqrt{2}$

$\therefore x + y = 4, -4, 3\sqrt{2}, -3\sqrt{2}$

15. 연립방정식 $\begin{cases} x+y=k \\ x^2+2y^2=4 \end{cases}$ 의 해가 오직 한 쌍이기 위한 실수 k 의 값은 k_1, k_2 의 두 개다. 이 때, k_1k_2 의 값은?

① -10 ② -8 ③ -6 ④ -4 ⑤ -2

해설

$\begin{cases} x+y=k & \cdots ㉠ \\ x^2+2y^2=4 & \cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $y=-x+k$ 를 ㉡에 대입하면

$x^2+2(-x+k)^2=4$

$3x^2-4kx+2k^2-4=0 \quad \cdots ㉢$

이차방정식 ㉢이 중근을 가져야 하므로 판별식을 D 라 하면

$\dfrac{D}{4}=(2k)^2-3(2k^2-4)=0$

$4k^2-6k^2+12=0,\ k^2=6$

$\therefore\ k=\pm\sqrt{6}$

$\therefore\ k_1k_2=\sqrt{6}\times(-\sqrt{6})=-6$