

1. 사차방정식 $x^4 + x^3 - 7x^2 - x + 6 = 0$ 의 근 중에서 최대의 근은?

① -2

② -1

③ 0

④ 6

⑤ 2

해설

$x^4 + x^3 - 7x^2 - x + 6 = 0$ 에서
 $x = 1, x = -1$ 을 대입하면 성립하므로
 $x^4 + x^3 - 7x^2 - x + 6$
 $= (x-1)(x+1)(x^2+x-6)$
 $= (x-1)(x+1)(x+3)(x-2) = 0$
 $\therefore x = -3, -1, 1, 2$
따라서 최대의 근은 2

2. $x^4 - 5x^2 - 14 = 0$ 의 두 허근을 α, β 라 할 때, $\alpha^2 + \beta^2$ 의 값을 구하면?

- ① 4 ② -4 ③ 8 ④ -8 ⑤ -16

해설

$$x^4 - 5x^2 - 14 = (x^2 + 2)(x^2 - 7) = 0 \text{이므로}$$

두 허근 α, β 는

각각 $\sqrt{2}i, -\sqrt{2}i$ 이므로

$$\alpha^2 + \beta^2 = -2 - 2 = -4$$

3. 삼차방정식 $2x^3 - 7x^2 + 11x + 13 = 0$ 의 세 근을 α, β, γ 라고 할 때, 다음 (가), (나), (다)에 알맞은 값을 차례로 쓴 것은?

- (가) $\alpha + \beta + \gamma$
(나) $\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha$
(다) $\alpha\beta\gamma$

- ① $\frac{7}{2}, \frac{11}{2}, -\frac{13}{2}$
④ $\frac{11}{2}, -\frac{13}{2}, \frac{7}{2}$
- ② $-\frac{7}{2}, \frac{13}{2}, \frac{11}{2}$
⑤ $\frac{7}{2}, -\frac{11}{2}, \frac{13}{2}$
- ③ $\frac{13}{2}, \frac{7}{2}, -\frac{11}{2}$

해설

삼차방정식 $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 (a \neq 0)$ 의 세 근을 α, β, γ 라 하면

$$\alpha + \beta + \gamma = -\frac{b}{a}$$

$$\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = \frac{c}{a}$$

$$\alpha\beta\gamma = -\frac{d}{a}$$

4. $x^3 - 1 = 0$ 의 한 허근을 ω 라 할 때, $\omega^3 + \bar{\omega}^3$ 의 값을 구하면? (단, $\bar{\omega}$ 는 ω 의 켈레복소수이다.)

① -1

② 0

③ 1

④ 2

⑤ 3

해설

$$x^3 - 1 = (x - 1)(x^2 + x + 1) = 0$$

$$x = 1 \text{ 또는 } x = \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}$$

$$\frac{-1 + \sqrt{3}i}{2} \text{를 } \omega \text{라 하면}$$

$$\bar{\omega} = \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2}$$

$$\therefore \omega^3 = 1, \bar{\omega}^3 = 1, \omega^3 + \bar{\omega}^3 = 2$$

5. 연립방정식 $\begin{cases} x^2 - y^2 = 2 \\ x - y = 1 \end{cases}$ 의 해를 순서쌍 (x, y) 으로 나타내면?

① $(2, 1)$

② $(\sqrt{2} + 1, \sqrt{2})$

③ $\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$

④ $(\sqrt{3}, 1)$

⑤ $\left(\frac{5}{3}, \frac{2}{3}\right)$

해설

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 2 \cdots \textcircled{1} \\ x - y = 1 \cdots \textcircled{2} \end{cases}$$

②을 $y = x - 1$ 로 변형하여

①에 대입하면

$$x^2 - (x - 1)^2 = x^2 - x^2 + 2x - 1 = 2$$

$$2x = 3$$

$$\therefore x = \frac{3}{2}, y = \frac{1}{2}$$

6. 연립방정식 $\begin{cases} x^2 - 3xy + 2y^2 = 0 \\ x^2 + 2y^2 = 12 \end{cases}$ 을 만족하는 x, y 에 대하여 $x+y$

값이 될 수 없는 것은?

① $3\sqrt{2}$

② 4

③ $-3\sqrt{2}$

④ -4

⑤ $4\sqrt{2}$

해설

$$\begin{aligned} x^2 - 3xy + 2y^2 &= 0 \\ (x - y)(x - 2y) &= 0 \\ \Rightarrow (x - y)(x - 2y) &= 0 \\ \Rightarrow x = y \text{ 또는 } x = 2y \\ \text{i) } x = y \\ x^2 + 2y^2 &= 3x^2 = 12 \\ x = \pm 2 &\Rightarrow y = \pm 2 \\ \text{ii) } x = 2y \\ x^2 + 2y^2 &= 6y^2 = 12 \\ y = \pm \sqrt{2} &\Rightarrow x = \pm 2\sqrt{2} \\ x + y &= (4, -4, 3\sqrt{2}, -3\sqrt{2}) \end{aligned}$$

7. 연립방정식 $\begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ x^2 - xy + y^2 = 3 \end{cases}$ 의 해를

$x = a, y = b$ 라 할 때, ab 의 값은?

- ① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$$x^2 + y^2 = 5 \quad \cdots \text{㉠}$$

$$x^2 - xy + y^2 = 3 \quad \cdots \text{㉡}$$

㉠을 ㉡에 대입하면 $5 - xy = 3, xy = 2$

$$\therefore ab = 2$$

8. 방정식 $(x^2 + x + 2)^2 + 8 = 12(x^2 + x)$ 의 모든 근의 합은?

- ① 1 ② 0 ③ -1 ④ -2 ⑤ -3

해설

$$x^2 + x = Y \text{ 라 하면, } (Y + 2)^2 + 8 = 12Y$$

$$Y^2 - 8Y + 12 = 0, (Y - 2)(Y - 6) = 0$$

$$Y = 2 \text{ 또는 } Y = 6$$

$$(i) Y = 2$$

$$x^2 + x - 2 = 0 \Rightarrow x = -2 \text{ 또는 } x = 1$$

$$(ii) Y = 6$$

$$x^2 + x - 6 = 0 \Rightarrow x = -3 \text{ 또는 } x = 2$$

$$\therefore \text{ 모든 근의 합} = -2$$

9. 다음 연립방정식의 모든 해의 합을 구하여라.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ xy = 12 \end{cases}$$

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

$x + y = u$, $xy = v$ 로 놓으면 주어진 연립방정식은

$$\begin{cases} u^2 - 2v = 25 \\ v = 12 \end{cases}$$

$\therefore u = \pm 7, v = 12$

따라서, 주어진 연립방정식은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{cases} x + y = 7 & \cdots \textcircled{\text{A}} \\ xy = 12 & \cdots \textcircled{\text{B}} \end{cases}$$

$$\text{또는 } \begin{cases} x + y = -7 & \cdots \textcircled{\text{A}} \\ xy = 12 & \cdots \textcircled{\text{B}} \end{cases}$$

(i) $\textcircled{\text{A}}, \textcircled{\text{B}}$ 에서 x, y 는 이차방정식 $t^2 - 7t + 12 = 0$ 의 두 근이

므로 $x = 3, y = 4$ 또는 $x = 4, y = 3$

(ii) $\textcircled{\text{A}}, \textcircled{\text{B}}$ 에서 x, y 는 이차방정식 $t^2 + 7t + 12 = 0$ 의 두 근이

므로 $x = -3, y = -4$ 또는 $x = -4, y = -3$

(i), (ii)로부터 구하는 모든 해의 합은 0

10. 다음 두 방정식이 공통근 α 를 갖는다. 이 때, $m + \alpha$ 의 값을 구하여라.

$$x^2 + (m + 2)x - 4 = 0, x^2 + (m + 4)x - 6 = 0$$

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

두 방정식의 공통근이 α 이므로
 $\alpha^2 + (m + 2)\alpha - 4 = 0 \cdots \textcircled{1}$
 $\alpha^2 + (m + 4)\alpha - 6 = 0 \cdots \textcircled{2}$
 $\textcircled{1} - \textcircled{2}$ 에서 $-2\alpha + 2 = 0 \therefore \alpha = 1$
 $\alpha = 1$ 을 $\textcircled{2}$ 에 대입하면 $1 + m + 2 - 4 = 0$
 $\therefore m = 1$
 $\therefore m + \alpha = 2$

11. 연립방정식 $\begin{cases} x+y=2a \\ xy=a \end{cases}$ 를 만족하는 순서쌍 (x,y) 가 한 개 뿐일 때, 양의 실수 a 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$$\begin{cases} x+y=2a \cdots ① \\ xy=a \cdots ② \end{cases}$$

①에서 $y = -x + 2a$ 를 ②에 대입하면

$$x(-x + 2a) = a$$

$\therefore -x^2 + 2ax = a$ 즉 $x^2 - 2ax + a = 0$ 이 한 개의

실근을 가져야 하므로 $D/4 = a^2 - a = 0$

$\therefore a = 0$ 또는 1 그런데

a 는 양의실수 이므로

$$a = 1$$

12. 방정식 $2xy-4x-y=4$ 를 만족하는 양의 정수 x, y 를 구하면 $\begin{cases} x=\alpha \\ y=\beta \end{cases}$,

$$\begin{cases} x=y \\ y=\delta \end{cases} \text{ 이다.}$$

$\alpha+\beta+\gamma+\delta$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 15

해설

주어진 식을 변형하면 $(2x-1)(y-2)=6$

조건에서 x, y 가 양의 정수이므로

$2x-1, y-2$ 도 각각 정수이고 특히 $2x-1$ 은 양의 홀수이다.

$$\therefore \begin{cases} 2x-1=1 \\ y-2=6 \end{cases} \quad \text{또는} \quad \begin{cases} 2x-1=3 \\ y-2=2 \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} x=1 \\ y=8 \end{cases}, \begin{cases} x=2 \\ y=4 \end{cases}$$

$$\therefore \alpha+\beta+\gamma+\delta=15$$

13. 이차방정식 $x^2 - ax + a + 2 = 0$ 의 두 근이 모두 정수가 되게 하는 모든 상수 a 에 대한 설명 중 옳은 것은?

① a 는 -10 이상 -2 이하이다.

② a 는 -2 이상 6 이하이다.

③ a 는 6 이상이다.

④ a 는 0 이하이다.

⑤ a 는 0 이상 8 이하이다.

해설

두 정수근을 α, β 라 하면 (단, $\beta \geq \alpha$)

$$\alpha + \beta = a, \alpha\beta = a + 2$$

이 두 식에서 a 를 소거하면

$$\alpha\beta - \alpha - \beta = 2, (\alpha - 1)(\beta - 1) = 3$$

$\alpha - 1, \beta - 1$ 이 정수이므로

$$\therefore \alpha = 2, \beta = 4 \text{ 또는 } \alpha = -2, \beta = 0$$

$$\therefore a = 6, -2$$

14. 방정식 $2x^2 - 4xy + 5y^2 - 8x - 4y + 20 = 0$ 을 만족하는 실수 x, y 의 값은?

- ① $x = 2, y = 4$ ② $x = 4, y = 2$ ③ $x = -1, y = 2$
④ $x = 2, y = -1$ ⑤ $x = -2, y = 1$

해설

판별식을 이용하기 위해 준식을 x 에 관하여 정리하면,

$$2x^2 - 4(y+2)x + 5y^2 - 4y + 20 = 0 \cdots \textcircled{1}$$

①이 실근을 가지므로 $\frac{D}{4} \geq 0$ 에서

$$4(y+2)^2 - 10y^2 + 8y - 40 \geq 0$$

$$6y^2 - 24y + 24 \leq 0$$

$$6(y^2 - 4y + 4) \leq 0$$

$$6(y-2)^2 \leq 0 \quad \therefore y = 2 \quad (\because y \text{ 는 실수})$$

$y = 2$ 를 ①에 대입하면,

$$2x^2 - 16x + 32 = 0, \quad 2(x-4)^2 = 0$$

$$\therefore x = 4$$