

1. 점 $(1, 2)$ 를 중심으로 하고 점 $(3, -2)$ 를 지나는 원의 방정식은?

① $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 4$ ② $(x+1)^2 + (y-2)^2 = 32$

③ $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 20$ ④ $(x+1)^2 + (y+2)^2 = 12$

⑤ $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 16$

해설

원의 반지름을 r 이라 하면

$(x-1)^2 + (y-2)^2 = r^2$ 이 $(3, -2)$ 를 지나므로

$$(3-1)^2 + (-2-2)^2 = r^2 \quad \therefore r^2 = 20$$

$$\therefore (x-1)^2 + (y-2)^2 = 20$$

2. $4x^2 + 4y^2 - 20x + 9 = 0$ 의 중심의 좌표 C 와 반지름 r 을 구하면?

① $C\left(-\frac{5}{2}, 0\right), r = 2$

② $C\left(\frac{5}{2}, 0\right), r = 4$

③ $C\left(0, \frac{5}{2}\right), r = 4$

④ $C\left(\frac{5}{2}, 0\right), r = 2$

⑤ $C\left(0, \frac{5}{2}\right), r = 2$

해설

$4x^2 + 4y^2 - 20x + 9 = 0$ 를 정리하면

$$x^2 + y^2 - 5x + \frac{9}{4} = 0$$

$$\therefore \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + y^2 = 4$$

따라서 중심의 좌표는 $\left(\frac{5}{2}, 0\right)$ 이며

반지름은 2이다.

3. 세 점 (1, 1), (2, -1), (3, 2)를 지나는 원의 방정식이 $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$ 이라 할 때 $A \times B \times C$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 20

해설

구하는 원의 방정식을
 $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0 \dots\dots \textcircled{\ast}$ 이라 하면
 $\textcircled{\ast}$ 는 점 (1, 1), (2, -1), (3, 2)를 지나므로
 $1 + 1 + A + B + C = 0, 4 + 1 + 2A - B + C = 0,$
 $9 + 4 + 3A + 2B + C = 0$
 $\therefore A = -5, B = -1, C = 4$
 $\therefore x^2 + y^2 - 5x - y + 4 = 0$
 $\therefore A \times B \times C = 20$

4. 방정식 $x^2 + y^2 + 2ax + 2by + c = 0$ 으로 나타내어지는 원이 y 축에 접할 조건은?

① $b^2 = c$

② $c^2 = b$

③ $a^2 = c$

④ $c^2 = a$

⑤ $b = 2c$

해설

y 축과의 공유점을 구하는 식은
 $x = 0$ 으로부터 $y^2 + 2by + c = 0$
 y 축에 접할 조건은 $D/4 = b^2 - c = 0$

5. 두 점 A(-3, 4), B(1, -2) 를 지름의 양끝으로 하는 원의 방정식을 구하면?

① $(x+1)^2 + (y-1)^2 = 13$ ② $(x-1)^2 + (y+1)^2 = 13$

③ $(x-1)^2 + (y+1)^2 = 10$ ④ $(x+1)^2 + (y-1)^2 = 10$

⑤ $(x+1)^2 + (y-1)^2 = 9$

해설

A(-3, 4), B(1, -2)가 지름의 양 끝점이므로
 $\overline{AB}$ 의 중점이 원의 중심 O(-1, 1) 이고,

$$\frac{1}{2}\overline{AB} = \overline{OA} = \overline{OB} = r$$

$$\begin{aligned}\text{반지름 } r = \overline{OA} &= \sqrt{(-3+1)^2 + (4-1)^2} \\ &= \sqrt{4+9} = \sqrt{13}\end{aligned}$$

$$\therefore \text{원의 방정식은 } (x+1)^2 + (y-1)^2 = 13$$

6. 두 원 $x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0$, $x^2 + y^2 - 6x - 8y = 0$ 의 위치관계 중 옳은 것은?
- ① 서로 외부에 있다
 - ② 외접한다
 - ③ 두 점에서 만난다
 - ④ 내접한다
 - ⑤ 한 원이 다른 원의 내부에 있다

해설

$x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0$ 을 정리하면

$$(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 1$$

$x^2 + y^2 - 6x - 8y = 0$ 을 정리하면

$$(x - 3)^2 + (y - 4)^2 = 5^2$$

$$\sqrt{3 - 1^2 + (4 - 1)^2} < 5 - 1$$

따라서 한 원이 다른 원의 내부에 있다.

7. 중심이 원점이고, 직선 $2x - y + 5 = 0$ 에 접하는 원의 반지름의 길이는?

① 1 ② $\sqrt{2}$ ③ $\sqrt{3}$ ④ 2 ⑤ $\sqrt{5}$

해설

원의 반지름의 길이 r 는 원의 중심 $(0,0)$ 과 직선 $2x - y + 5 = 0$ 사이의 거리와 같으므로

$$r = \frac{|0 + 0 + 5|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \sqrt{5}$$

8. 다음 원 $x^2 + y^2 = 9$ 와 직선 $y = x + 5$ 의 교점의 개수를 구하여라.

▶ 답 : 개

▷ 정답 : 0개

해설

원의 중심과 직선 사이의 거리를 구해보면,

$$\frac{|5|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{5\sqrt{2}}{2} > 3$$

반지름보다 크므로 원과 직선은 만나지 않는다.

9. 점 A(-2, 3) 에서 원 $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0$ 에 그은 접선의 접점을 B라 할 때, AB의 길이를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

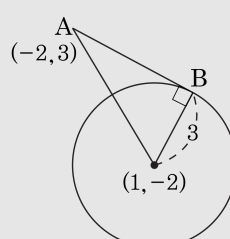
해설

$$x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0$$

$$(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 3^2$$

원의 중심은 (1, -2), 반지름은 3 이므로

$$AB = \sqrt{(3^2 + (-5)^2) - 3^2} = 5$$



10. 원 $x^2 + y^2 = 9$ 에 접하고 기울기가 4 인 접선의 방정식은 $y = 4x \pm k$ 이다. k 를 구하면? (단, $k > 0$)

① $2\sqrt{7}$ ② $2\sqrt{17}$ ③ $5\sqrt{13}$ ④ $3\sqrt{17}$ ⑤ $3\sqrt{7}$

해설

기울기가 주어진 접선의 방정식

$y = mx \pm r\sqrt{m^2 + 1}$ 에서

원 $x^2 + y^2 = 9$ 에 접하고 기울기가 4 인 접선의 방정식은

$y = 4x \pm 3\sqrt{17}$ 이다.

11. 원 $x^2 + y^2 = 6$ 에 접하고 기울기가 2인 접선의 방정식을 구하면?

① $y = 2x \pm \sqrt{10}$ ② $y = 2x \pm 3\sqrt{2}$ ③ $y = 2x \pm 2\sqrt{5}$

④ $y = 2x \pm 2\sqrt{6}$ ⑤ $y = 2x \pm \sqrt{30}$

해설

기울기가 2 인 직선의 방정식은
 $y = 2x + k$ 직선이 원에 접하므로 직선과 원의
중심 사이 거리는 반지름과 같다.

$$\therefore \frac{|2 \times 0 + (-1) \times 0 + k|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \sqrt{6}$$

$$\Rightarrow |k| = \sqrt{30}$$

$$\Rightarrow k = \pm \sqrt{30}$$

$$\therefore \text{접선의 방정식은 } y = 2x \pm \sqrt{30}$$

12. 점 $(-4, 2)$ 를 지나고 x 축, y 축에 모두 접하는 원은 2 개가 있다. 이 때, 두 원 중 큰 원의 넓이는?

① 25π ② 50π ③ 75π ④ 100π ⑤ 125π

해설

제 2 사분면의 점 $(-4, 2)$ 를 지나고
 x 축, y 축에 접하는 원의 방정식은
 $(x-r)^2 + (y-r)^2 = r^2 (r > 0)$
 $(-4+r)^2 + (2-r)^2 = r^2$
 $16 - 8r + r^2 + 4 - 4r + r^2 = r^2, (r-2)(r-10) = 0$
 $\therefore r = 2$ 또는 $r = 10$
따라서 큰 원의 반지름의 길이가 10 이므로
넓이는 $\pi \cdot 10^2 = 100\pi$

13. 점 $A(6, 0)$ 와 원 $x^2 + y^2 + 6x - 6y + 9 = 0$ 위의 점 P 를 잇는 선분 AP 를 1 : 2로 내분하는 점 Q 의 자취의 방정식을 구하면?

① $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 1$

② $(x - 3)^2 + (y - 1)^2 = 2$

③ $(x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 1$

④ $(x - 3)^2 + (y - 1)^2 = 1$

⑤ $(x + 3)^2 + (y - 1)^2 = 1$

해설

$$\text{원 } (x + 3)^2 + (y - 3)^2 = 3^2$$

$P(\alpha, \beta)$, $Q(x, y)$ 라 하면

$\overline{AP}$ 를 1 : 2로 내분한 점

$$Q(x, y) \text{는 } Q\left(\frac{\alpha + 12}{3}, \frac{\beta}{3}\right)$$

$$\therefore x = \frac{\alpha + 12}{3}, y = \frac{\beta}{3} \dots\dots\dots ①$$

그런데 점 $P(\alpha, \beta)$ 는 원 위의 점이므로

$$(\alpha + 3)^2 + (\beta - 3)^2 = 9 \dots\dots\dots ②$$

$$①, ② \text{에서 구하는 자취는 } (x - 3)^2 + (y - 1)^2 = 1$$

14. 원 $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 3 = 0$ 위의 점에서 직선 $x - y + 3 = 0$ 에 이르는 거리의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

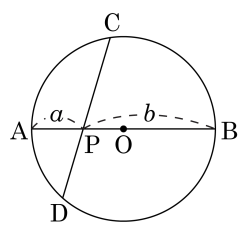
▷ 정답 : $\sqrt{2}$

해설

원 $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 3 = 0$ 을
표준형으로 고치면 $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 8$ 이므로
중심이 $(1, -2)$ 이고 반지름의 길이가 $2\sqrt{2}$ 인 원이다.
원의 중심 $(1, -2)$ 에서 직선 $x - y + 3 = 0$ 에 이르는 거리 d 는
$$\frac{|1 - (-2) + 3|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{6}{\sqrt{2}} = \frac{6\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2}$$

따라서 원 위의 점에서 직선 $x - y + 3 = 0$ 에
이르는 거리의 최솟값은
 $d - (\text{반지름의 길이}) = 3\sqrt{2} - 2\sqrt{2} = \sqrt{2}$

15. 다음 그림과 같이 원의 지름 AB 위의 임의의 한 점 P를 지나 $\overline{PC}$ 의 길이가 원의 반지름의 길이와 같아지도록 현 CD를 긋는다. $\overline{AP} = a$, $\overline{BP} = b$ 라 할 때, 선분 DP의 길이를 a , b 를 써서 나타내면?



- ① $\frac{a+b}{2}$ ② $a+b$ ③ $\sqrt{ab}$
 ④ ab ⑤ $\frac{2ab}{a+b}$

해설

$$\overline{CP} = \frac{\overline{AB}}{2} = \frac{a+b}{2} \text{ 이고}$$

$$\overline{AP} \cdot \overline{BP} = \overline{CP} \cdot \overline{DP} \text{ 이므로}$$

$$ab = \frac{a+b}{2} \cdot \overline{DP}$$

$$\therefore \overline{DP} = \frac{2ab}{a+b}$$

16. 원 $x^2 + y^2 = \frac{13}{4}$ 과 함수 $y = \frac{3}{2x}$ 의 그래프가 만나는 모든 교점의 x 좌표를 a, b, c, d 라 할 때, $4abcd$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 9

해설

$y = \frac{3}{2x}$ 을 $x^2 + y^2 = \frac{13}{4}$ 에 대입하면

$$x^2 + \frac{9}{4x^2} = \frac{13}{4}$$

$x \neq 0$ 이므로 양변에 $4x^2$ 을 곱하고 정리하면

$$4x^4 - 13x^2 + 9 = (x^2 - 1)(4x^2 - 9) = 0$$

$$\therefore x = \pm 1, \pm \frac{3}{2}$$

따라서 구하는 답은

$$4 \times (-1) \times 1 \times \frac{3}{2} \times \left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{9}{4} \times 4 = 9$$

17. 두 원 $x^2 + y^2 = 11$, $(x - 5)^2 + y^2 = 16$ 의 공통현의 길이는?

- ① $\sqrt{2}$ ② $\sqrt{11}$ ③ 5 ④ $2\sqrt{7}$ ⑤ $4\sqrt{2}$

해설

두 원 $x^2 + y^2 = 11$ 과 $(x - 5)^2 + y^2 = 16$ 의 공통현의 방정식은

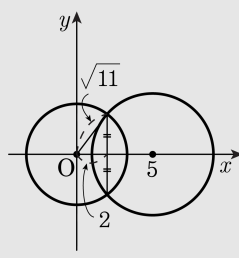
$$(x^2 + y^2 - 11) - (x^2 - 10x + y^2 + 9) = 0$$

$$10x - 20 = 0 \quad \therefore x = 2$$

원 $x^2 + y^2 = 11$ 의 중심 $(0, 0)$ 과 공통현 $x = 2$ 사이의 거리가 2이고,

반지름의 길이가 $\sqrt{11}$ 이므로 공통현의 길이는

$$2 \times \sqrt{(\sqrt{11})^2 - 2^2} = 2\sqrt{7}$$



18. 두 점 A(-2, 2), B(2, 2)를 지름의 양 끝점으로 하는 원과 중심이 y 축 위에 있고, 두 점 (2, 1), (0, 3)을 지나는 원의 공통외접선의 길이는?

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

A(-2, 2) B(2, 2) 의 중점은 원의 중심이므로,

$$\text{중점 } O = \left(\frac{-2+2}{2}, \frac{2+2}{2} \right) = (0, 2)$$

반지름의 길이 $\overline{OA} = \sqrt{(-2)^2 + 0} = 2$

중심이 y 축에 있으므로 (0, a) 라고 하면

두 점 (2, 1), (0, 3) 과의 거리가 각각 같

으므로,

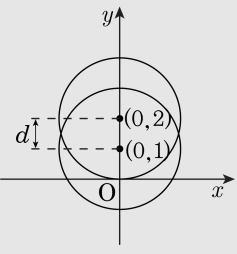
$$(0-2)^2 + (a-1)^2 = (0-0)^2 + (a-3)^2$$

$$\therefore a = 1$$

반지름: $\sqrt{(a-3)^2} = \sqrt{(1-3)^2} = 2$

공통외접선의 길이 d 는 중심간의 거리와

같으므로 $2 - 1 = 1$



19. 원 $x^2 + y^2 = 5$ 위의 점 P에서의 접선이 점 (3, 1)을 지날 때, 점 P의 좌표를 (a, b) , (c, d) 라 할 때, $a + b + c + d$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

접점을 (x_1, y_1) 이라 하면 접선은

$$x_1 x + y_1 y = 5 \cdots \textcircled{1}$$

이것이 점 (3, 1)을 지나므로

$$3x_1 + y_1 = 5 \cdots \textcircled{2}$$

또, (x_1, y_1) 은 $x^2 + y^2 = 5$

위의 점이므로 $x_1^2 + y_1^2 = 5 \cdots \textcircled{3}$

②에서 $y_1 = 5 - 3x_1$ 을 ③에 대입하면

$$x_1^2 + (5 - 3x_1)^2 - 5 = 0,$$

$$10x_1^2 - 30x_1 + 20 = 0$$

$$10(x_1 - 1)(x_1 - 2) = 0$$

$\therefore x_1 = 1$ 이면 $y_1 = 2$, $x_1 = 2$ 이면 $y_1 = -1$

$\therefore$ 접점은 $(1, 2), (2, -1)$

20. 두 원 $x^2 + y^2 = 16$, $x^2 + (y - 4)^2 = 1$ 의 공통접선의 y 절편은?

- ① $\frac{26}{5}$ ② $\frac{21}{4}$ ③ $\frac{16}{3}$ ④ $\frac{11}{2}$ ⑤ 6

해설

공통접선의 방정식을 $y = mx + n$ 이라 하면
원의 중심에서 직선까지의 거리가 반지름의 길이와 같다.
중심 (0, 0) 에서 접선까지의 거리가 4 ,
중심 (0, 4) 에서 접선까지의 거리가 1 이므로

$$\frac{|n|}{\sqrt{m^2 + (-1)^2}} = 4$$

$$\frac{|-4 + n|}{\sqrt{m^2 + (-1)^2}} = 1$$

두 식을 연립하여 풀면

$$4|-4 + n| = |n|$$

$$4(-4 + n) = \pm n$$

$$\therefore n = \frac{16}{5}, \frac{16}{3} \quad n > 5 \text{ 이므로}$$

구하는 공통접선의 y 절편은 $\frac{16}{3}$