1. 점 $(1, 2)$ 를 중심으로 하고 점$(3, -2)$ 를 지나는 원의 방정식은?

① $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 4$

② $(x+1)^2 + (y-2)^2 = 32$

③ $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 20$

④ $(x+1)^2 + (y+2)^2 = 12$

⑤ $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 16$

해설

원의 반지름을 r 이라 하면

$(x-1)^2 + (y-2)^2 = r^2$ 이 $(3, -2)$ 를 지나므로

$(3-1)^2 + (-2-2)^2 = r^2 \qquad \therefore\ r^2 = 20$

$\therefore (x-1)^2 + (y-2)^2 = 20$

2. $4x^2 + 4y^2 - 20x + 9 = 0$의 중심의 좌표 C와 반지름 r을 구하면?

① $C\left(-\frac{5}{2},\ 0\right)$, $r = 2$

② $C\left(\frac{5}{2},\ 0\right)$, $r = 4$

③ $C\left(0,\ \frac{5}{2}\right)$, $r = 4$

④ $C\left(\frac{5}{2},\ 0\right)$, $r = 2$

⑤ $C\left(0,\ \frac{5}{2}\right)$, $r = 2$

해설

$4x^2 + 4y^2 - 20x + 9 = 0$를 정리하면

$x^2 + y^2 - 5x + \frac{9}{4} = 0$

$\therefore\ \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + y^2 = 4$

따라서 중심의 좌표는 $\left(\frac{5}{2},\ 0\right)$이며

반지름은 2이다.

3. 세 점 $(1,\ 1)$, $(2,\ -1)$, $(3,\ 2)$를 지나는 원의 방정식이 $x^2+y^2+\mathrm{A}x+\mathrm{B}y+\mathrm{C}=0$이라 할 때 $\mathrm{A}\times\mathrm{B}\times\mathrm{C}$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 20

해설

구하는 원의 방정식을

$x^2+y^2+\mathrm{A}x+\mathrm{B}y+C=0 \cdots\cdots$ ㉡이라 하면

㉡는 점 $(1, 1)$, $(2, -1)$, $(3,\ 2)$를 지나므로

$1+1+\mathrm{A}+\mathrm{B}+\mathrm{C}=0$, $4+1+2\mathrm{A}-\mathrm{B}+\mathrm{C}=0$,

$9+4+3\mathrm{A}+2\mathrm{B}+\mathrm{C}=0$

$\therefore\ \mathrm{A}=-5,\ \mathrm{B}=-1,\ \mathrm{C}=4$

$\therefore\ x^2+y^2-5x-y+4=0$

$\therefore\ \mathrm{A}\times\mathrm{B}\times\mathrm{C}=20$

4. 방정식 $x^2 + y^2 + 2ax + 2by + c = 0$ 으로 나타내어지는 원이 y 축에 접할 조건은?

① $b^2 = c$ ② $c^2 = b$ ③ $a^2 = c$

④ $c^2 = a$ ⑤ $b = 2c$

해설

y 축과의 공유점을 구하는 식은
$x = 0$ 으로부터 $y^2 + 2by + c = 0$
y 축에 접할 조건은 $D/4 = b^2 - c = 0$

5. 두 점 $A(-3,\ 4)$, $B(1,\ -2)$ 를 지름의 양끝으로 하는 원의 방정식을 구하면?

① $(x+1)^2+(y-1)^2=13$
② $(x-1)^2+(y+1)^2=13$
③ $(x-1)^2+(y+1)^2=10$
④ $(x+1)^2+(y-1)^2=10$
⑤ $(x+1)^2+(y-1)^2=9$

해설

$A(-3,\ 4)$, $B(1,\ -2)$가 지름의 양 끝점이므로
$\overline{AB}$ 의 중점이 원의 중심 $O(-1,\ 1)$ 이고,

$$\frac{1}{2}\overline{AB}=\overline{OA}=\overline{OB}=\mathrm{r}$$

반지름 $r=\overline{OA}=\sqrt{(-3+1)^2+(4-1)^2}$
$=\sqrt{4+9}=\sqrt{13}$

$\therefore$ 원의 방정식은 $(x+1)^2+(y-1)^2=13$

6. 두 원 $x^2+y^2-2x-2y+1=0$, $x^2+y^2-6x-8y=0$의 위치관계 중 옳은 것은?

① 서로 외부에 있다

② 외접한다

③ 두 점에서 만난다

④ 내접한다

⑤ 한 원이 다른 원의 내부에 있다

해설

$x^2+y^2-2x-2y+1=0$을 정리하면

$(x-1)^2+(y-1)^2=1$

$x^2+y^2-6x-8y=0$을 정리하면

$(x-3)^2+(y-4)^2=5^2$

$\sqrt{3-1^2+(4-1)^2}<5-1$

따라서 한 원이 다른 원의 내부에 있다.

7. 중심이 원점이고, 직선 $2x-y+5=0$ 에 접하는 원의 반지름의 길이는?

① 1　② $\sqrt{2}$　③ $\sqrt{3}$　④ 2　⑤ $\sqrt{5}$

해설

원의 반지름의 길이 r 는 원의 중심 $(0,0)$ 과 직선 $2x-y+5=0$ 사이의 거리와 같으므로

$$r=\frac{|0+0+5|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\sqrt{5}$$

8. 다음 원 $x^2+y^2=9$와 직선 $y=x+5$ 의 교점의 개수를 구하여라.

▶ 답 : ______ 개

▷ 정답 : 0 개

해설

원의 중심과 직선 사이의 거리를 구해보면,

$$\frac{|5|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{5\sqrt{2}}{2}>3$$

반지름보다 크므로 원과 직선은 만나지 않는다.

9. 점 A$(-2,\ 3)$ 에서 원 $x^2+y^2-2x+4y-4=0$에 그은 접선의 접점을 B라 할 때, AB의 길이를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

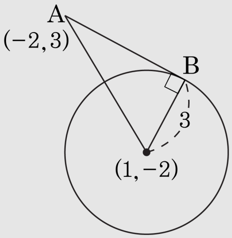
해설

$x^2+y^2-2x+4y-4=0$

$(x-1)^2+(y+2)^2=3^2$

원의 중심은 $(1,\ -2)$, 반지름은 3이므로

$\overline{\mathrm{AB}} = \sqrt{(3^2+(-5)^2)-3^2}=5$



10. 원 $x^2+y^2=9$ 에 접하고 기울기가 4 인 접선의 방정식은 $y=4x\pm k$ 이다. k 를 구하면? (단, $k>0$)

① $2\sqrt{7}$ ② $2\sqrt{17}$ ③ $5\sqrt{13}$ ④ $3\sqrt{17}$ ⑤ $3\sqrt{7}$

해설

기울기가 주어진 접선의 방정식
$y=mx\pm r\sqrt{m^2+1}$ 에서
원 $x^2+y^2=9$ 에 접하고 기울기가 4 인 접선의 방정식은
$y=4x\pm 3\sqrt{17}$ 이다.

11. 원 $x^2+y^2=6$ 에 접하고 기울기가 2인 접선의 방정식을 구하면?

① $y=2x\pm\sqrt{10}$ ② $y=2x\pm3\sqrt{2}$ ③ $y=2x\pm2\sqrt{5}$

④ $y=2x\pm2\sqrt{6}$ ⑤ $y=2x\pm\sqrt{30}$

해설

기울기가 2 인 직선의 방정식은

$y=2x+k$ 직선이 원에 접하므로 직선과 원의 중심 사이 거리는 반지름과 같다.

$$\therefore \quad \frac{|2\times0+(-1)\times0+k|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\sqrt{6}$$

$$\Rightarrow \quad |k|=\sqrt{30}$$

$$\Rightarrow \quad k=\pm\sqrt{30}$$

$\therefore$ 접선의 방정식은 $y=2x\pm\sqrt{30}$

12. 점 (−4, 2) 를 지나고 x 축, y 축에 모두 접하는 원은 2 개가 있다. 이때, 두 원 중 큰 원의 넓이는?

① 25π ② 50π ③ 75π ④ 100π ⑤ 125π

해설

제 2 사분면의 점$(-4, 2)$ 를 지나고
x 축, y 축에 접하는 원의 방정식은
$(x-r)^2+(y-r)^2=r^2(r>0)$
$(-4+r)^2+(2-r)^2=r^2$
$16-8r+r^2+4-4r+r^2=r^2,\ (r-2)(r-10)=0$
$\therefore\ r=2$ 또는 $r=10$
따라서 큰 원의 반지름의 길이가 10 이므로
넓이는 $\pi\cdot 10^2=100\pi$

13. 점 $A(6,\ 0)$와 원 $x^2+y^2+6x-6y+9=0$ 위의 점 P를 잇는 선분 AP를 $1\ :\ 2$로 내분하는 점 Q의 자취의 방정식을 구하면?

① $(x-2)^2+(y-1)^2=1$

② $(x-3)^2+(y-1)^2=2$

③ $(x-3)^2+(y-2)^2=1$

④ $(x-3)^2+(y-1)^2=1$

⑤ $(x+3)^2+(y-1)^2=1$

해설

원$(x+3)^2+(y-3)^2=3^2$

$\mathrm{P}(\alpha,\ \beta),\ \mathrm{Q}(x,\ y)$라 하면

$\overline{\mathrm{AP}}$ 를 $1:\ 2$ 로 내분한 점

$\mathrm{Q}(x,\ y)$는 $\mathrm{Q}\left(\dfrac{\alpha+12}{3},\ \dfrac{\beta}{3}\right)$

$\therefore\ \ x=\dfrac{\alpha+12}{3},\ y=\dfrac{\beta}{3}\cdots\cdots①$

그런데 점$\mathrm{P}(\alpha,\ \beta)$ 는 원 위의 점이므로

$(\alpha+3)^2+(\beta-3)^2=9\cdots\cdots②$

①, ② 에서 구하는 자취는 $(x-3)^2+(y-1)^2=1$

14. 원 $x^2+y^2-2x+4y-3=0$ 위의 점에서 직선 $x-y+3=0$ 에 이르는 거리의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $\sqrt{2}$

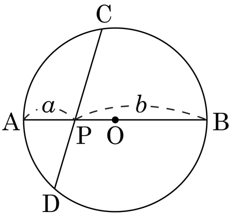
해설

원 $x^2+y^2-2x+4y-3=0$ 을
표준형으로 고치면 $(x-1)^2+(y+2)^2=8$ 이므로
중심이 $(1,\ -2)$ 이고 반지름의 길이가 $2\sqrt{2}$ 인 원이다.
원의 중심 $(1,\ -2)$ 에서 직선 $x-y+3=0$ 에 이르는 거리 d 는

$$\frac{|1-(-2)+3|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{6}{\sqrt{2}}=\frac{6\sqrt{2}}{2}=3\sqrt{2}$$

따라서 원 위의 점에서 직선 $x-y+3=0$ 에
이르는 거리의 최솟값은
$d-$ (반지름의 길이)$=3\sqrt{2}-2\sqrt{2}=\sqrt{2}$

15. 다음 그림과 같이 원의 지름 AB 위의 임의의 한 점 P 를 지나 $\overline{\mathrm{PC}}$ 의 길이가 원의 반지름의 길이와 같아지도록 현 CD 를 긋는다. $\overline{\mathrm{AP}}=a$, $\overline{\mathrm{BP}}=b$ 라 할 때, 선분 DP 의 길이를 a, b 를 써서 나타내면?



① $\dfrac{a+b}{2}$ ② $a+b$ ③ $\sqrt{ab}$

④ ab ⑤ $\dfrac{2ab}{a+b}$

해설

$\overline{\mathrm{CP}}=\dfrac{\overline{\mathrm{AB}}}{2}=\dfrac{a+b}{2}$ 이고

$\overline{\mathrm{AP}}\cdot\overline{\mathrm{BP}}=\overline{\mathrm{CP}}\cdot\overline{\mathrm{DP}}$ 이므로

$ab=\dfrac{a+b}{2}\cdot\overline{\mathrm{DP}}$

$\therefore \overline{\mathrm{DP}}=\dfrac{2ab}{a+b}$

16. 원 $x^2+y^2=\dfrac{13}{4}$ 과 함수 $y=\dfrac{3}{2x}$ 의 그래프가 만나는 모든 교점의 x 좌표를 a, b, c ,d 라 할 때, $4abcd$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 9

해설

$y=\dfrac{3}{2x}$ 을 $x^2+y^2=\dfrac{13}{4}$ 에 대입하면

$x^2+\dfrac{9}{4x^2}=\dfrac{13}{4}$

$x\neq 0$ 이므로 양변에 $4x^2$ 을 곱하고 정리하면

$4x^4-13x^2+9=(x^2-1)(4x^2-9)=0$

$\therefore\ x=\pm 1,\ \pm\dfrac{3}{2}$

따라서 구하는 답은

$4\times(-1)\times 1\times\dfrac{3}{2}\times\left(-\dfrac{3}{2}\right)=\dfrac{9}{4}\times 4=9$

17. 두 원 $x^2+y^2=11$, $(x-5)^2+y^2=16$의 공통현의 길이는?

① $\sqrt{2}$ ② $\sqrt{11}$ ③ 5 ④ $2\sqrt{7}$ ⑤ $4\sqrt{2}$

해설

두 원 $x^2+y^2=11$과 $(x-5)^2+y^2=16$의 공통현의 방정식은

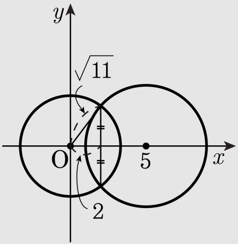
$(x^2+y^2-11)-(x^2-10x+y^2+9)=0$

$10x-20=0 \quad \therefore x=2$

원 $x^2+y^2=11$의 중심 $(0,0)$과 공통현 $x=2$사이의 거리가 2이고,

반지름의 길이가 $\sqrt{11}$이므로 공통현의 길이는

$2\times\sqrt{\left(\sqrt{11}\right)^2-2^2}=2\sqrt{7}$



18. 두 점 A$(-2,\ 2)$, B$(2,\ 2)$를 지름의 양 끝점으로 하는 원과 중심이 y 축 위에 있고, 두 점 $(2,\ 1)$, $(0,\ 3)$을 지나는 원의 공통외접선의 길이는?

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

해설

A$(-2,\ 2)$ B$(2,\ 2)$ 의 중점은 원의 중심이므로,

중점 $\mathrm{O} = \left(\dfrac{-2+2}{2},\ \dfrac{2+2}{2}\right) = (0,\ 2)$

반지름의 길이 $\overline{\mathrm{OA}} = \sqrt{(-2)^2+0} = 2$

중심이 y 축에 있으므로 $(0,\ a)$ 라고 하면

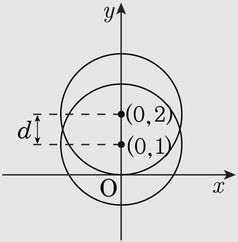
두점 $(2,\ 1)$, $(0,\ 3)$ 과의 거리가 각각 같으므로,

$(0-2)^2+(a-1)^2 = (0-0)^2+(a-3)^2$

$\therefore a = 1$

반지름: $\sqrt{(a-3)^2} = \sqrt{(1-3)^2} = 2$

공통외접선의 길이 d 는 중심간의 거리와 같으므로 $2-1=1$



19. 원 $x^2+y^2=5$ 위의 점 P에서의 접선이 점 $(3,\ 1)$을 지날 때, 점 P의 좌표를 $(a,\ b)$, $(c,\ d)$라 할 때, $a+b+c+d$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

접점을 (x_1, y_1)이라 하면 접선은
$x_1x+y_1y=5 \cdots ①$
이것이 점 $(3,1)$을 지나므로
$3x_1+y_1=5 \cdots ②$
또, (x_1, y_1)은 $x^2+y^2=5$
위의 점이므로 $x_1^2+y_1^2=5 \cdots ③$
②에서 $y_1=5-3x_1$ 을 ③에 대입하면
$x_1^2+(5-3x_1)^2-5=0$,
$10x_1^2-30x_1+20=0$
$10(x_1-1)(x_1-2)=0$
$\therefore x_1=1$이면 $y_1=2$, $x_1=2$이면 $y_1=-1$
$\therefore$ 접점은 $(1,2),(2,-1)$

20. 두 원 $x^2+y^2=16$, $x^2+(y-4)^2=1$ 의 공통접선의 y 절편은?

① $\frac{26}{5}$ ② $\frac{21}{4}$ ③ $\frac{16}{3}$ ④ $\frac{11}{2}$ ⑤ 6

해설

공통접선의 방정식을 $y=mx+n$ 이라 하면
원의 중심에서 직선까지의 거리가 반지름의 길이와 같다.
중심 $(0,\ 0)$ 에서 접선까지의 거리가 4 ,
중심 $(0,\ 4)$ 에서 접선까지의 거리가 1 이므로

$$\frac{|n|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=4$$

$$\frac{|-4+n|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=1$$

두 식을 연립하여 풀면

$4|-4+n|=|n|$

$4(-4+n)=\pm n$

$\therefore n=\frac{16}{5},\ \frac{16}{3}$ $n>5$ 이므로

구하는 공통접선의 y 절편은 $\frac{16}{3}$