1. 원점 O와 점 A(3, 6)을 이은 선분 OA를 2 : 1 로 내분하는 점을 P, 선분 OP를 2 : 1 로 외분하는 점을 Q라고 할 때, 두 점 P, Q 사이의 거리를 구하면?

▶ 답 :

▷ 정답 : $2\sqrt{17}$

해설

$\mathrm{P}\left(\frac{2\times 3+1\times 0}{2+1}, \frac{2\times 6+1\times 0}{2+1}\right) = (2, 4)$

$\mathrm{Q}\left(\frac{2\times 2-1\times 0}{2-1}, \frac{2\times 6-1\times 0}{2-1}\right) = (4, 12)$ 이므로

$\overline{\mathrm{PQ}} = \sqrt{(4-2)^2+(12-4)^2} = \sqrt{68} = 2\sqrt{17}$ 이다.

2. $\triangle ABC$ 의 변 BC, CA, AB 의 중점이 각각 $P(-1,\ a)$, $Q(3,\ 3)$, $R(1,\ 6)$ 이고, 이 삼각형의 무게중심의 좌표가 $\left(b,\ \frac{10}{3}\right)$ 일 때, ab 의 값은?

① 1 ② $2\sqrt{5}$ ③ 3 ④ 4 ⑤ $4\sqrt{5}$

해설

$\triangle ABC$ 의 무게중심은 $\triangle PQR$ 의 무게중심과 일치하게 되므로,

$\left(\frac{-1+3+1}{3},\ \frac{a+3+6}{3}\right) = \left(b,\ \frac{10}{3}\right)$

$b = 1,\ \frac{a+9}{3} = \frac{10}{3}$

$a = 1,\ \ b = 1\ \ \therefore\ ab = 1$

3. 기울기가 2 이고 점 (2, 1) 을 지나는 직선이 x 축, y 축과 만나는 점을 각각 A, B 라 할 때, 선분 AB 의 길이는?

① $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ ② $\frac{3\sqrt{5}}{2}$ ③ 5 ④ $3\sqrt{5}$ ⑤ 6

해설

기울기가 2 이고 점 (2, 1) 을 지나는 직선의 방정식은
$y-1=2(x-2), \therefore y=2x-3 \cdots$㉠
㉠에 $y=0$ 을 대입하면
$0=2x-3, \quad \therefore x=\frac{3}{2}$ 이므로
x 축과 만나는 점 A 의 좌표는
$\mathrm{A}\left(\frac{3}{2}, 0\right)$
㉠의 y 절편이 -3 이므로 y 축과
만나는 점 B 는 B(0, -3)
$\therefore \overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{(0-\frac{3}{2})^2+(-3-0)^2}=\frac{3\sqrt{5}}{2}$

4. 두 이차함수 $y = -x^2 + 3$과 $y = x^2 - 4x + 3$의 그래프의 꼭지점을 각각 A, B라 할 때, 직선 AB의 x절편은?

① $\frac{3}{2}$ ② $\frac{4}{3}$ ③ $\frac{2}{3}$ ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ $\frac{1}{3}$

해설

$y = -x^2 + 3$ 의 꼭지점은 $A(0, 3)$ 이고,
$y = x^2 - 4x + 3 = (x-2)^2 - 1$이므로 꼭지점은 $B(2, -1)$ 이다.
이 때, 두 점 $A(0, 3)$,$B(2, -1)$을 지나는
직선의 방정식은 $y = -2x + 3$
따라서, x절편은 $0 = -2x + 3$에서
$x = \frac{3}{2}$ 이므로 $\frac{3}{2}$이다.

5. 두 직선 $3x-2y+1=0,\ 3x-2y-4=0$ 사이의 거리를 구하면?

① $\frac{\sqrt{13}}{13}$ ② $\frac{3\sqrt{13}}{13}$ ③ $\frac{5\sqrt{13}}{13}$
④ $\frac{6\sqrt{13}}{5}$ ⑤ $\frac{7\sqrt{13}}{5}$

해설

두 직선이 평행하므로 한 직선의 임의의 점에서 나머지 직선까지의 거리를 구하면 된다.

$ex)3x-2y+1=0$의 $\left(0,\frac{1}{2}\right)$

$\Rightarrow \frac{|-2\times\frac{1}{2}-4|}{\sqrt{3^2+2^2}}=\frac{5}{\sqrt{13}}=\frac{5\sqrt{13}}{13}$

6. 두 원 $x^2+y^2=1$, $(x-a)^2+(y-b)^2=4$에 대하여 두 원이 외접할 때 a^2+b^2의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 9

해설

외접하기 위한 조건은 $\sqrt{a^2+b^2}=2+1$
$\therefore a^2+b^2=9$

7. 원 $x^2+y^2=1$ 밖의 점 $\mathrm{P}(3,\ 4)$에서 이 원에 두 개의 접선을 그을 때 그 접점을 Q, R이라고 하자. 직선 QR의 방정식을 $ax+by=1$라 할 때 $a+b$를 구하여라.

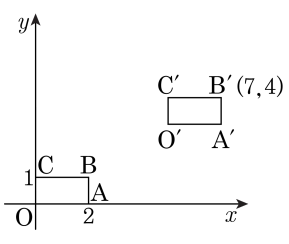
▶ 답:

▷ 정답: 7

해설

접점의 좌표를 $\mathrm{Q}(x_1,\ y_1)$, $\mathrm{R}(x_2,\ y_2)$라고 하면
Q, R에서의 접선의 방정식은 각각
$x_1x+y_1y=1$, $x_2x+y_2y=1$이고,
두 접선은 모두 점 $\mathrm{P}(3,\ 4)$를 지나므로
$3x_1+4y_1=1$, $3x_2+4y_2=1$
여기서 $(x_1,\ y_1)$, $(x_2,\ y_2)$는
방정식 $3x+4y=1$의 근이며, 이 두 접점을
지나는 직선은 오직 하나뿐이므로
직선 QR의 방정식은 $3x+4y=1$이다.
$\therefore\ a=3,\ b=4 \quad \therefore\ a+b=7$

8. 좌표평면에서 원점 O와 두 점 A(2, 0), C(0, 1)에 대하여 $\overline{OA}, \overline{OC}$를 두 변으로 하는 직사각형 OABC를 평행 이동하여 $O \to O', A \to A', B \to B', C \to C'$으로 옮겨지도록 하였다. 점 B′의 좌표가 (7, 4)일 때, 직선 A′C′의 방정식은?



① $x + 2y - 10 = 0$ ② $x + 2y - 13 = 0$

③ $x + 2y - 16 = 0$ ④ $2x + 3y - 17 = 0$

⑤ $2x + 3y - 19 = 0$

해설

점 B(2, 1)이 점 B′(7, 4)로 옮겨지므로
직사각형 O′A′B′C′은 직사각형 OABC를
x 축의 방향으로 5, y 축의 방향으로 3만큼 평행 이동한 것이다.
따라서 두 점 A(2, 0), C(0, 1)은 각각 A′(7, 3), C′(5, 4)로 옮겨지므로

직선 A′C′의 방정식은 $y - 3 = \dfrac{4-3}{5-7}(x-7)$

$\therefore\ y = -\dfrac{1}{2}x + \dfrac{13}{2}$

$\therefore\ x + 2y - 13 = 0$

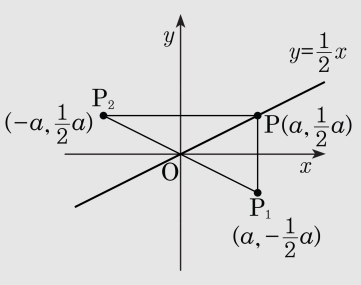
해설

직선 A′C′은 직선 AC를 평행이동한 것이므로
직선 A′C′의 기울기는 직선 AC의 기울기인 $-\dfrac{1}{2}$이다.
한편, $\overline{AB} = \overline{A'B'} = 1$에서 점 A′의 좌표는 (7, 3)이므로
이것을 $y = -\dfrac{1}{2}x + b$에 대입하여 정리하면 $b = \dfrac{13}{2}$이다.
따라서 구하는 직선 A′C′의 방정식은
$y = -\dfrac{1}{2}x + \dfrac{13}{2}$,
$\therefore\ x + 2y - 13 = 0$

9. 직선 $y=\frac{1}{2}x$위의 점 P(a, b) 를 x 축, y축에 대하여 각각 대칭이동한 점을 P_1, P_2라 하자. $\triangle PP_1P_2$ 의 넓이가 4일 때, 두 양수 a, b 에 대하여 $a+b$ 의 값을 구하면?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설



점 P(a, b)가 직선 $y=\frac{1}{2}x$위의 점이므로 $P\left(a, \frac{1}{2}a\right)$, x축 대칭 : $P_1\left(a, -\frac{1}{2}a\right)$, y축 대칭 : $P_2\left(-a, \frac{1}{2}a\right)$

$\triangle PP_1P_2$는 $\angle P_1PP_2 = 90°$인 직각삼각형으로 넓이는 $\overline{PP_1} \times \overline{PP_2} \times \frac{1}{2}$이다.

$\overline{PP_1} = a$, $\overline{PP_2} = 2a$

$\therefore a \times 2a \times \frac{1}{2} = 4$

$a = \pm 2$

$a > 0$이므로 $a = 2$, $b = \frac{1}{2}a = 1$

$\therefore a + b = 3$

10. 점$(1,3)$을 점$(-1,2)$에 대하여 대칭이동한 점의 좌표를 구하면?

① $(3,\ -1)$　② $(-3,\ 1)$　③ $(1,\ -3)$

④ $(-1,\ 3)$　⑤ $(-1,\ -3)$

해설

대칭이동한 점을 (a,b)라고 하면
점 (a,b)와 점 $(1,3)$의 중점이
점 $(-1,2)$이므로

$\frac{a+1}{2}=-1, \frac{b+3}{2}=2$에서

$a=-3, b=1$

$\therefore (-3,\ 1)$

11. 집합 $A = \{(x,\ y)|ax - by = 12\}$에 대하여 $(6,\ 2) \in A$, $(-3,\ -2) \in A$ 일 때, $a + b$의 값은?

① 12 ② 16 ③ 20 ④ 26 ⑤ 30

해설

$(6,\ 2) \in A$이므로 $x = 6$, $y = 2$
$6a - 2b = 12$, $3a - b = 6$ $\cdots$ ㉠
$(-3,\ -2) \in A$이므로 $x = -3$, $y = -2$
$-3a + 2b = 12$ $\cdots$ ㉡
㉠, ㉡을 연립하면 $b = 18$
㉠에서 $3a - 18 = 6$ $\therefore\ a = 8$
$\therefore\ a + b = 26$

12. 세 집합 $A = \{x \mid x$는 10 이하의 자연수 $\}$,
$B = \{x \mid x$는 10 이하의 5의 배수 $\}$,
$C = \{x \mid x$는 10의 약수 $\}$사이의 포함 관계는?

① $A \subset B \subset C$ ② $A \subset C \subset B$ ③ $B \subset A \subset C$
④ $B \subset C \subset A$ ⑤ $C \subset B \subset A$

해설

$A = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10\}$
$B = \{5,\ 10\}$
$C = \{1,\ 2,\ 5,\ 10\}$
$\therefore\ B \subset C \subset A$

13. 두 집합 A, B 사이의 포함관계가 다음 그림과 같을 때, 다음 중 항상 옳은 것은?

① $A \cap B = \varnothing$ ② $A \cup B = A$ ③ $A - B = \varnothing$

④ $B \subset A$ ⑤ $B - A = B$

해설

$A \subset B \Rightarrow A \cup B = B$
$\Rightarrow A \cap B = A$
$\Rightarrow A - B = \varnothing$
$\Rightarrow B^c \subset A^c$

14. 집합 S 의 원소의 개수를 $n(S)$, 부분집합의 개수를 $|S|$라 하자. 집합 A, B에 대하여, $|A|+|B| = |A \cup B|$, $n(A) = 10$일 때, $n(A \cap B)$의 값은?

① 8 ② 9 ③ 10 ④ 11 ⑤ 12

해설

$n(A) = 10$ 이므로 $|A| = 2^{10}$ 이다.
$n(B) = b$, $n(A \cup B) = c$라 하고, 문제의 뜻에 따르면 $2^{10} + 2^b = 2^c$ 이다.
여기서 양변을 2^{10} 으로 나누면
$1 + 2^{b-10} = 2^{c-10}$ 이므로 좌변은 1보다 크고,
우변은 2의 거듭제곱이다.
$1 + 2^{b-10}$은 2의 배수이므로 $2^{b-10} = 1$
$\therefore\ b = 10$
그리고 $2^{c-10} = 2\ \ \therefore c = 11$
$n(A \cap B) = n(A) + n(B) - n(A \cup B)$
$= 10 + 10 - 11 = 9$

15. 집합 $A = \{x \mid x$는 12의 약수$\}$ 일 때, 적어도 하나의 원소가 홀수인 집합 A 의 부분집합의 개수를 구하여라.

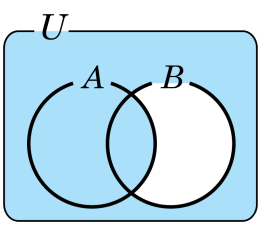
▶ 답 : 개

▷ 정답 : 48 개

해설

$A = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$ 적어도 하나는 홀수인 부분집합의 개수는 모든 부분집합의 개수에서 짝수의 원소로만 이루어진 부분집합의 개수를 빼면 되므로 $2^6 - 2^{6-2} = 64 - 16 = 48$ (개) 이다.

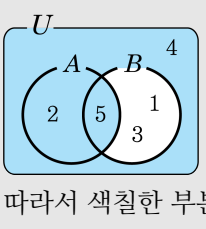
16. $U = \{1,2,3,4,5\}$ 의 두 부분집합 A, B 에 대하여 $A = \{2,5\}, B = \{1,3,5\}$ 일 때, 다음 벤 다이어그램에서 색칠된 부분을 나타내는 집합은?



① $\{2,4\}$ ② $\{4,5\}$ ③ $\{2,4,5\}$

④ $\{1,2,3,4\}$ ⑤ $\{1,2,4,5\}$

해설



따라서 색칠한 부분이 나타내는 집합은 $\{2,4,5\}$ 이다.

17. 다음 벤 다이어그램과 같은 포함 관계일 때, 옳지 않은 것은?

① $A \cap B = A$
② $A - B = \varnothing$
③ $A \cup B = B$
④ $A \subset B$
⑤ $(A \cup B) - B = A$

⑤

해설

⑤ $(A \cup B) - B = \varnothing$

18. 모든 실수 x, y 에 대하여 $(x+y)^2 \le k(x^2+y^2-xy)$ 가 성립하기 위한 실수 k 의 최솟값은?

① $\frac{5}{2}$ ② 4 ③ $2\sqrt{2}$ ④ $3\sqrt{2}$ ⑤ $5\sqrt{2}$

해설

i) $y=0$ 일 때 준식은 $x^2 \le kx^2$

$\therefore k \ge 1 \cdots$ ㉠

ii) $y \ne 0$ 일 때 양변을 y^2 으로 나누면 준식은

$$\left(\frac{x}{y}+1\right)^2 \le k\left\{\left(\frac{x}{y}\right)^2+1-\frac{x}{y}\right\}$$

여기서 $\frac{x}{y}$ 를 t 로 치환하면

$t^2+2t+1 \le k(t^2+1-t)$

$\therefore (k-1)t^2-(k+2)t+(k-1) \ge 0 \cdots$ ㉡

㉡ 식이 모든 실수 t 에 대하여 성립하려면

$k \ne 1$ 일 때 : $k-1>0$

$D=(k+2)^2-4(k-1)^2=-3k(k-4) \le 0$

$\therefore k \ge 4 \cdots$ ㉢

$k=1$ 일 때 : $-3t \ge 0$ 은 모든 실수 t 에 대하여 성립할 수 없다.

$\therefore$ ㉠, ㉢에서 구하는 k 의 범위는 $k \ge 4$

19. x가 양의 실수 일 때, $x^2+1+\frac{1}{x^2}$의 최솟값과 그 때의 x값을 차례대로 구하여라.

▶ 답:

▶ 답:

▷ 정답: 3

▷ 정답: 1

해설

$x^2>0,\ \frac{1}{x^2}>0$이므로

산술평균과 기하평균에 의하여

$x^2+1+\frac{1}{x^2}\geq 2\sqrt{x^2\times\frac{1}{x^2}}+1\geq 2+1=3$

등호는 $x^2=\frac{1}{x^2}$일 때 성립하므로 $x^4=1$

따라서 양의 실수 x는 1이다.

최솟값은 3이고, x값은 1이다.

20. 함수 $f(x) = ax^3 - bx + 10$ (a, b 는 상수)에 대하여 $f(-7) = 5$일 때, $f(7)$의 값을 구하면?

① 0 ② 5 ③ 10 ④ 15 ⑤ 20

해설

$f(-7) = -7^3a + 7a + 10 = 5$에서, $7^3a - 7b = 5$

$\therefore\ f(7) = 7^3a - 7b + 10 = 5 + 10 = 15$

21. 함수 $f(x)=2x-1, g(x)=\sqrt{x-1}$ 에 대하여 $(f\circ(f\circ g)^{-1}f)(2)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 9

해설

$$\begin{aligned}(f\cdot(f\cdot g)^{-1}f)(2)&=(f\cdot g^{-1})(2)\\&=f(g^{-1}(2))\end{aligned}$$

$g^{-1}(2)=k$라면 $g(k)=2$

$g(k)=\sqrt{(k-1)}=2\to k=5$

$\therefore\ f(g^{-1}(2))=f(5)=10-1=9$

22. $\frac{2}{x(x+2)}+\frac{2}{(x+2)(x+4)}+\frac{2}{(x+4)(x+6)}$ 을 간단히 하면?

① $\frac{1}{x}$ ② $\frac{2}{x}$ ③ $\frac{6}{x(x+6)}$

④ $\frac{2}{x(x+2)}$ ⑤ $\frac{2}{x+2}$

해설

이항분리로 푼다.

$$\frac{2}{x(x+2)}+\frac{2}{(x+2)(x+4)}+\frac{2}{(x+4)(x+6)}$$

$$=2\times\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+2}+\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x+4}+\frac{1}{x+4}-\frac{1}{x+6}\right)\right\}$$

$$=\frac{1}{x}-\frac{1}{x+6}=\frac{6}{x(x+6)}$$

23. $3+\sqrt{8}$의 소수 부분을 x라 할 때, $\sqrt{x^2+4x}$의 값을 구하라.

▶ 답:

▷ 정답: 2

해설

(1) 단계
$2<\sqrt{8}<3$이므로
$3+\sqrt{8}-2+2=5+\sqrt{8}-2$ 에서
소수 부분 $x=\sqrt{8}-2$
(2) 단계
$x+2=\sqrt{8}$
(양변을 제곱하면) $x^2+4x+4=8$,
$x^2+4x=4$를 대입하면
(준식)$=\sqrt{4}=2$

24. $x=\sqrt{2}+1,\ y=\sqrt{2}-1$ 일 때,

$\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}+\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$ 의 값은?

① 1 ② $\sqrt{2}$ ③ 2 ④ $2\sqrt{2}$ ⑤ $\sqrt{3}$

해설

$$\frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}+\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$$

$$=\frac{(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2+(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2}{x-y}$$

$$=\frac{x+y-2\sqrt{xy}+x+y+2\sqrt{xy}}{x-y}=\frac{2(x+y)}{x-y}$$

$$\begin{cases} x+y=\sqrt{2}+1+\sqrt{2}-1=2\sqrt{2} \\ x-y=\sqrt{2}+1-\sqrt{2}+1=2 \end{cases}$$

$$\therefore\ \frac{2(x+y)}{x-y}=\frac{2\times 2\sqrt{2}}{2}=2\sqrt{2}$$

25. $x=\sqrt{17-12\sqrt{2}}$일 때, 다항식 $x^5-4x^4-7x^3-21x^2-x+2$의 값은?

① $4-2\sqrt{2}$ ② $4+2\sqrt{2}$ ③ $3-2\sqrt{2}$

④ $3+2\sqrt{2}$ ⑤ $2-2\sqrt{2}$

해설

$x=\sqrt{17-12\sqrt{2}}=\sqrt{17-2\sqrt{72}}=3-2\sqrt{2}$이므로 $x-3=-2\sqrt{2}$

양변을 제곱하면, $(x-3)^2=8$

$\therefore\ x^2-6x+1=0$

주어진 식을 x^2-6x+1로 나누면

$x^5-4x^4-7x^3-21x^2-x+2$

$=(x^2-6x+1)(x^3+2x^2+4x+1)+x+1$

$=x+1$

$=(3-2\sqrt{2})+1$

$=4-2\sqrt{2}$