1. 연립부등식 $\begin{cases} 4x < x+4 \\ 3x-1 \le 5x+7 \end{cases}$ 을 만족하는 정수의 개수를 구하여라.

▶ 답: ＿＿＿＿＿＿＿＿ 개

▷ 정답: 6 개

해설

$\begin{cases} 4x < x+4 \\ 3x-1 \le 5x+7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x < 4 \\ 3x-5x \le 7+1 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} x < \dfrac{4}{3} \\ x \ge -4 \end{cases}$

따라서 $-4 \le x < \dfrac{4}{3}$ 를 만족하는 정수는 -4, -3, -2, -1, 0, 1의 6개이다.

2. 다음 연립부등식을 만족하는 가장 큰 정수는?

$$\begin{cases} \frac{2}{5}(4x-1) > \frac{1}{3}(2x+3) \\ 0.5(x-9) < 0.2(x-3) \end{cases}$$

① 6 ② 8 ③ 10 ④ 12 ⑤ 13

해설

i) $\frac{2}{5}(4x-1) > \frac{1}{3}(2x+3)$ 의 양변에 15 를 곱해 주면,

$\Rightarrow 6(4x-1) > 5(2x+3)$

$\Rightarrow x > \frac{3}{2}$

ii) $0.5(x-9) < 0.2(x-3)$ 의 양변에 10 을 곱해 주면,

$\Rightarrow 5(x-9) < 2(x-3)$

$\Rightarrow x < 13$

$\therefore \frac{3}{2} < x < 13$

3. 연립부등식 $2x+a<x+2<4(x-1)$ 의 해가 $b<x<5$ 일 때, $a+b$ 의 값은?

① -5 ② -1 ③ 1 ④ 3 ⑤ 5

해설

$2x+a<x+2<4(x-1)$
$2x+a<x+2 \to x<2-a$
$x+2<4(x-1) \to x>2$
$2<x<2-a$ 가 $b<x<5$ 이므로 $a=-3,\ b=2$
$\therefore\ a+b=-1$

4. 좌표평면 위의 두 점 P(a, 3), Q(1, a) 에 대하여 $\overline{\mathrm{PQ}} = \sqrt{2}$ 일 때, a 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 2

해설

$\overline{\mathrm{PQ}} = \sqrt{(1-a)^2 + (a-3)^2} = \sqrt{2a^2 - 8a + 10}$

$\overline{\mathrm{PQ}} = \sqrt{2}$ 이므로 $\sqrt{2a^2 - 8a + 10} = \sqrt{2}$

양변을 제곱하면 $2a^2 - 8a + 10 = 2$

$2a^2 - 8a + 8 = 0$, $a^2 - 4a + 4 = 0$, $(a-2)^2 = 0$

$\therefore\ a = 2$

5. 민수는 각각 a, $a+2$, $a+4$ 인 막대로 삼각형을 만들려고 한다. 민수가 삼각형을 만들 수 있는 a 의 범위를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $a > 2$

해설

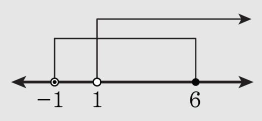
삼각형은 가장 긴 변의 길이가 나머지 두 변의 길이의 합보다 작아야 하므로, $a+4 < a+(a+2)$ 이고 정리하면 $a > 2$ 이다.

6. 연립부등식 $\begin{cases} x^2 - 5x - 6 \le 0 \\ (x+k)(x-1) > 0 \end{cases}$ 의 해가 $1 < x \le 6$ 이 되도록 실수 k의 값의 범위를 구하면?

① $k > 1$　　② $k \ge 1$　　③ $k < -1$

④ $k > -1$　　⑤ $k \ge -1$

해설



$x^2 - 5x - 6 \le 0$,

$(x-6)(x+1) \le 0$,

$-1 \le x \le 6$

연립방정식의 해가 $1 < x \le 6$이 되려면

$(x+k)(x-1) > 0$의 해는 $x > 1$, $x < -k$이어야 하고

다음 그림에서 k의 범위는 $-k \le -1$, $k \ge 1$

7. 재질이 고른 삼각형 모양의 널빤지를 좌표평면 위에 놓으니 세 꼭짓점의 좌표가 $A(9,7), B(2,3), C(7,5)$가 되었다. 손가락을 수직으로 세워 이 널빤지를 그 위에 얹을 때 수평이 되도록 하기 위한내부의 한 점의 좌표를 구하면?

① $(4,5)$ ② $(5,5)$ ③ $(5,6)$ ④ $(6,5)$ ⑤ $(6,6)$

해설

수평이 유지되기 위해선 무게중심에 손가락을 세워야한다.
따라서 무게중심 G는

$$G = \left(\frac{9+2+7}{3},\ \frac{7+3+5}{3}\right) = (6,\ 5)$$

8. 두 원
A : $x^2 + y^2 + 2x - 4 = 0$,
B : $x^2 + y^2 - 2ax + 2y - 6 = 0$
에서 원 A 가 원 B 의 둘레를 이등분하면서 지날 때, a의 값은?

① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

해설

원 B 가 원 A 의 둘레를 이등분하므로
두 원의 공통현이
원 A 의 중심을 지나야 한다.
공통현의 방정식은
$(1 + a)x - y + 1 = 0 \cdots\cdots$ ㉠
한편, $x^2 + y^2 + 2x - 4 = 0$
$(x + 1)^2 + y^2 = 5$ 이므로
㉠이 점 $(-1, 0)$ 을 지나야한다.
$-1 - a + 1 = 0$
$\therefore\ a = 0$

9. 두 원 $x^2+y^2-4x=0$, $x^2+y^2-6y+8=0$ 의 공통외접선의 길이는?

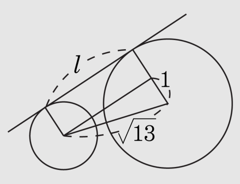
① $2\sqrt{3}$　② $\sqrt{13}$　③ $\sqrt{21}$　④ $2\sqrt{6}$　⑤ $3\sqrt{6}$

해설

$(x-2)^2+y^2=4,\ x^2+(y-3)^2=1$

$l=\sqrt{(\sqrt{13})^2-1^2}=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$

$\therefore$ 외접선의 길이 : $2\sqrt{3}$



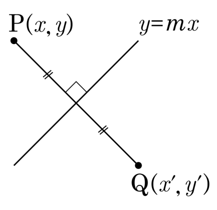
10. 점 $(1, -2)$ 를 지나는 직선을 점$(2,\ 3)$ 에 대하여 대칭이동한 후 x축에 대하여 대칭이동 하였더니 점 $(4, -4)$ 를 지난다고 한다. 처음 직선의 방정식을 구하면?

① $y = -4x + 2$　　② $y = 4x + 2$　　③ $y = -4x + 4$
④ $y = 4x + 4$　　⑤ $y = -4x + 6$

해설

$(1, -2)$ 를 지나는 직선의 방정식을
$y + 2 = m(x - 1) \cdots$ ①이라 하면
①식을 점 $(2, 3)$ 에 대칭이동하면 (중점공식이용)
$x \to 4 - x\ y \to 6 - y$이므로
$6 - y + 2 = m(4 - x - 1),\ y = m(x - 3) + 8 \cdots$ ②
직선 ②를 x축에 대칭이동하면
$-y = m(x - 3) + 8 \quad \cdots$ ③
직선 ③이 점 $(4, -4)$ 를 지나므로
$4 = m(4 - 3) + 8 \therefore m = -4$
따라서 처음 직선의 방정식 ①은
$y + 2 = -4(x - 1),\ y = -4x + 2$

11. 다음은 직선 $y=mx$에 대한 점 $\mathrm{P}(x, y)$의 대칭점을 구하는 과정이다. 빈칸에 들어갈 수식을 순서대로 고르면?



> 대칭점을 $\mathrm{Q}(x', y')$ 라 하면,
> PQ 의 중점이 직선
> $y=mx$ 위에 있으므로,
> (가)$= m$ (나),
> 또한 직선
> PQ 와 직선 $y=mx$ 가 직교하므로
> $\dfrac{y'-y}{x'-x} =$ (다)
> (가), (나), (다) 에 의하여
> $x' = \dfrac{1}{1+m^2}\{(1-m^2)x+2my\}$
> $y' = \dfrac{1}{1+m^2}\{2mx-(1-m^2)y\}$

① (가):$y+y'$, (나):$x+x'$, (다):$-\dfrac{1}{m}$
② (가):$\dfrac{y+y'}{2}$, (나):$\dfrac{x+x'}{2}$, (다):$-\dfrac{1}{m}$
③ (가):$\dfrac{y+y'}{2}$, (나):$\dfrac{x+x'}{2}$, (다):$\dfrac{1}{m}$
④ (가):$\dfrac{y+y'}{3}$, (나):$\dfrac{x+x'}{3}$, (다):$\dfrac{1}{m}$
⑤ (가):$\dfrac{y+y'}{3}$, (나):$\dfrac{x+x'}{3}$, (다):$\dfrac{1}{m^2}$

해설

(가), (나) : $\mathrm{P}=(x,\ y)$, $\mathrm{Q}=(x',\ y')$ 이므로

중점은 $\left(\dfrac{x+x'}{2}, \dfrac{y+y'}{2}\right)$ 이다.

(다): 두 직선이 직교하면 기울기의 곱이 -1 이 다.

$\Rightarrow\ m\times$(다)$=-1$

$\therefore$ (다) : $-\dfrac{1}{m}$

12. $a+b+c=0$일 때, 다음 중 $2a^2+bc$와 같은 것은?

① $(a-c)^2$ ② $(b+c)^2$ ③ $(a+b)(b+c)$

④ $(a-b)(a-c)$ ⑤ $(a-b)(a+c)$

해설

$2a^2+bc=2a^2-b(a+b)$ $(\because\ c=-a-b)$
$=2a^2-ab-b^2$
$=(a-b)(2a+b)$
$=(a-b)(a+b+a)$
$=(a-b)(a-c)$ $(\because a+b=-c)$

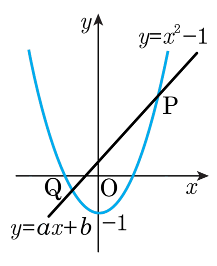
13. $x^2+5xy+ay^2+y-2$가 x, y의 두 일차식의 곱으로 나타내어질 때, 상수 a의 값은?

① $\frac{8}{49}$ ② $\frac{49}{8}$ ③ 49 ④ 8 ⑤ 0

해설

$x^2+5xy+ay^2+y-2$를 x에 대해 정리하면
$x^2+5yx+ay^2+y-2$
이 이차식이 두 개의 일차식으로 인수분해 되려면
판별식이 완전제곱식이 되어야 한다.
$D=(25-4a)y^2-4y+8$
$\frac{D'}{4}=4-8(25-4a)=0,$
$4-200+32a=0$
$\therefore\ a=\frac{49}{8}$

14. 이차함수 $y = x^2 - 1$ 의 그래프와 직선 $y = ax + b$ 가 다음 그림과 같이 두 점 P, Q 에서 만난다. 점 P 의 x 의 좌표가 $1 + \sqrt{2}$ 일 때, $2a + b$ 의 값을 구하여라. (단, a, b 는 유리수이다.)



▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

이차함수 $y = x^2 - 1$ 의 그래프와 직선 $y = ax + b$ 의 한 교점 P 의 x 좌표가 $1 + \sqrt{2}$ 이므로 $1 + \sqrt{2}$ 는 이차방정식 $x^2 - 1 = ax + b$ 의 근이다.

$\left(1 + \sqrt{2}\right)^2 - 1 = a\left(1 + \sqrt{2}\right) + b$

$2 + 2\sqrt{2} = a + b + a\sqrt{2}$

a, b 가 유리수이므로 무리수가 서로 같을 조건에 의하여

$2 = a + b,\ 2 = a$

$\therefore a = 2,\ b = 0$

15. 둘레의 길이가 48cm 인 직사각형 중에서 그 넓이가 최대가 되도록 하는 직사각형의 가로, 세로의 길이를 순서대로 써라.

▶ 답: cm

▶ 답: cm

▷ 정답: 12 cm

▷ 정답: 12 cm

해설

가로, 세로의 길이를 각각 x cm, $(24-x)$ cm 라 하면

$y = x(24-x)$
$= -x^2 + 24x$
$= -(x-12)^2 + 144$

$x = 12$ 일 때, 최댓값 144 를 갖는다.

$\therefore x = 12,\ 24 - x = 12$

따라서 가로의 길이는 12 cm, 세로의 길이도 12 cm

16. 연립부등식 $\begin{cases} 6 < -x+2 < -2x-1 \\ |x| < a \end{cases}$ 의 해가 없을 때, 양수 a 의 값의 범위를 구하여라.

① $3 < a \le 4$　② $0 < a \le 3$　③ $0 < a < 3$
④ $0 < a \le 4$　⑤ $0 < a < 4$

해설

$$\begin{cases} 6 < -x+2 < -2x-1 \cdots ㉠ \\ |x| < a \cdots ㉡ \end{cases}$$

㉠에서 $6 < -x+2$ 의 해는 $x < -4$
$-x+2 < -2x-1$ 의 해는 $x < -3$
$\therefore x < -4$
㉡에서 $|x| < a$는 $-a < x < a$ 두 연립부등식의 해가 없으려면
$-a \ge -4$, $a \le 4$,
그런데 a는 양수이므로 a의 값의 범위는 $0 < a \le 4$ 이다.

17. 제주시에서 남서쪽 $1100\,\mathrm{km}$ 해상에 태풍의 중심이 있다. 이 태풍은 중심에서 반지름 $50\,\mathrm{km}$ 이내가 폭풍우권이며, $30\,\mathrm{km}/h$의 속도로 북동진한다. 지름도 $10\,\mathrm{km}/h$씩 넓어진다. 제주시가 폭풍우권 내에 들어있는 시간은? (단, 제주시는 점으로 생각하고, 태풍은 직진한다고 가정한다.)

① 15시간　② 16시간　③ 30시간
④ 46시간　⑤ 50시간

해설

$|-1100 + 30x - 0| \le 50 + 5x$

$-50 - 5x \le -1100 + 30x \le 50 + 5x$

$25x \le 1150$에서 $x \le 46$

$35x \ge 1050$에서 $x \ge 30$

$\therefore 30 \le x \le 46$

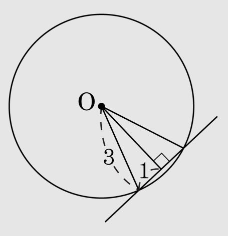
따라서, 제주시가 폭풍우권 내에 들어있는 시간은 $46-30 = 16$(시간)이다.

18. 직선 $y = x + m$ 이 원 $x^2 + y^2 = 9$ 에 의하여 잘린 현의 길이가 2 일 때, m^2 의 값을 구하면?

▶ 답 :

▷ 정답 : 16

해설



위 그림을 보면 원과 직선사이 거리가

$\sqrt{3^2 - 1^2} = 2\sqrt{2}$ 임을 알 수 있다.

이제 공식을 사용하면,

$\dfrac{|m|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = 2\sqrt{2}$

$\Rightarrow \quad m = \pm 4$

$\therefore \quad m^2 = 16$

19. 두 점 $A(4,1)$, $B(5,1)$을 직선 $x-y+1=0$에 대하여 대칭이동시킨 점을 각각 C, D라 할 때, 사각형 ABCD의 넓이는?

① 3　② $\frac{9}{2}$　③ $\frac{22}{3}$　④ 9　⑤ $\frac{33}{2}$

해설

점 $A(4,1)$의 대칭점을 $C(a,b)$라 하면 $\overline{AC}$의 중점

$M\left(\frac{a+4}{2}, \frac{b+1}{2}\right)$이 직선 $x-y+1=0$위에 있으므로 대입하면

$\frac{a+4}{2} - \frac{b+1}{2} + 1 = 0$

$\therefore a-b+5=0 \cdots ①$

또 직선 AC는 직선 $x-y+1=0$에 수직이므로

$\frac{b'-1}{a-4} \times 1 = -1$

$\therefore a+b-5=0 \cdots ②$

①, ②를 연립하면 $a=0,\ b=5$

$\therefore C(0,5)$

같은 방법으로 점 $B(5,1)$의 대칭점 $D(0,6)$이다.

따라서 사각형 ABCD의 넓이는 $\frac{1}{2} \times 5 \times 5 - \frac{1}{2} \times 4 \times 4 = \frac{9}{2}$

20. 다음 식의 분모를 0으로 만들지 않는 모든 실수 x에 대하여

$$\frac{1}{(x-1)(x-2)\times\cdots\times(x-2007)}$$
$$=\frac{a_1}{x-1}+\frac{a_2}{x-2}+\cdots+\frac{a_{2007}}{x-2007}$$

이 성립할 때, $a_1+a_2+\cdots+a_{2007}$의 값을 구하면?

① 1 ② -1 ③ 1997

④ 0 ⑤ -1997

해설

우변을 통분하면

$$\frac{(a_1+a_2+\cdots+a_{2007})x^{2006}+\cdots}{(x-1)(x-2)\times\cdots\times(x-2007)}$$
$$=\frac{1}{(x-1)(x-2)\times\cdots\times(x-2007)}$$

주어진 등식은 항등식이므로 분자의 계수를 비교하면

$a_1+a_2+\cdots+a_{2007}=0$

21. x에 대한 다항식 $x^{10}(x^2+ax+b)$를 $(x-2)^2$으로 나눈 나머지가 $2^{10}(x-2)$일 때, 상수 a, b에 대하여 $3b-2a$의 값은?

① 3 ② 6 ③ 8 ④ 10 ⑤ 12

해설

$x^{10}(x^2+ax+b)=(x-2)^2\,Q(x)+2^{10}(x-2)$

$x^{10}\left(x^2+ax+b\right)=(x-2)\{(x-2)\,Q(x)+2^{10}\}$이므로

$x^2+ax+b=(x-2)(x-\alpha)$라 할 수 있다.

$x^{10}(x-2)(x-\alpha)=(x-2)\{(x-2)\,Q(x)+2^{10}\}$

$\therefore\ x^{10}(x-\alpha)=(x-2)\,Q(x)+2^{10}$

양변에 $x=2$를 대입하면

$2^{10}(2-\alpha)=2^{10}\ \therefore \alpha=1$

$$\begin{aligned}\therefore\ x^2+ax+b &= (x-2)(x-1)\\ &= x^2-3x+2\end{aligned}$$

$a=-3,\ b=2$

$\therefore\ 3b-2a=12$

22. $P(x)=x^2+x+1$ 에 대하여 $P(x^6)$ 을 $P(x)$ 로 나눈 나머지를 구하면?

① $x-4$ ② $4x-1$ ③ 5

④ 4 ⑤ 3

해설

$P(x^6)=x^{12}+x^6+1$

$x^2+x+1=0$ 의 해를 w 라 하자.

$w^2+w+1=0,$ 양변에 $(w-1)$ 을 곱하면

$w^3-1=0,\ w^3=1$

$x^{12}+x^6+1=(x^2+x+1)Q(x)+ax+b$ 에

w 를 대입하면,

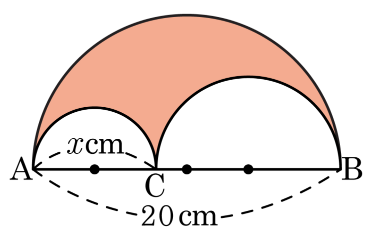
$(w^3)^4+(w^3)^2+1=(w^2+w+1)Q(w)+aw+b$

$3=aw+b$

w 는 허수, $a,\ b$ 는 실수 이므로, $a=0, b=3$

$\therefore$ 나머지$=3$

23. 다음 그림과 같이 세 개의 반원으로 이루어진 도형이 있다. 큰 반원의 지름이 20 cm 이고 색칠한 부분의 넓이가 $y\pi\,\mathrm{cm}^2$ 일 때, y 의 최댓값을 구하면?



① 10　② 15　③ 16　④ 25　⑤ 36

해설

$\overline{\mathrm{AC}} = x\,\mathrm{cm}$ 이므로 $\overline{\mathrm{BC}} = (20 - x)\,\mathrm{cm}$ 이다.
따라서 색칠한 부분의 넓이 S 는
(전체 반원의 넓이 - 작은 두 원의 넓이의 합) 이다.

$$\frac{1}{2} \times 10^2\pi - \left\{\frac{1}{2}\pi\left(\frac{x}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}\pi\left(\frac{20-x}{2}\right)^2\right\} = y\pi$$

$$50\pi - \left(\frac{x^2}{8}\pi + \frac{400 - 40x + x^2}{8}\pi\right) = y\pi$$

$$50\pi - \left(\frac{2x^2 - 40x + 400}{8}\right)\pi = y\pi$$

$$-\frac{1}{4}x^2\pi + 5x\pi = y\pi$$

$$\begin{aligned} y\pi &= -\frac{1}{4}\pi(x^2 - 20x) \\ &= -\frac{1}{4}\pi(x^2 - 20x + 100 - 100) \\ &= -\frac{1}{4}\pi(x - 10)^2 + 25\pi \text{이다.} \end{aligned}$$

따라서 두 원의 반지름이 각각 10 cm 일 때, 넓이는 최댓값 $25\pi\,\mathrm{cm}^2$ 를 갖는다.

24. 연립부등식 $5x-8<3x+8$, $x-5>-2a$ 를 만족하는 x 중 자연수들의 합이 22 일 때, 자연수 a 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$5x-8<3x+8$ 을 풀면 $x<8$

$x-5>-2a$ 를 풀면 $x>-2a+5$

$\therefore\ -2a+5<x<8$

이 부등식을 만족하는 자연수 x 의 합이 22 이므로

$x=4,\ 5,\ 6,\ 7$

따라서 $3\le -2a+5<4$ 이어야 하므로

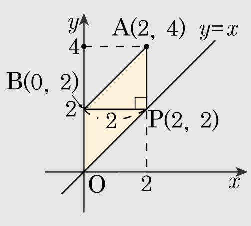
$\frac{1}{2}<a\le 1$

그런데 a 가 자연수이므로 $a=1$ 이다.

25. 직선 $y = x$ 위의 점 P가 두 점 $\mathrm{A}(2, 4)$, $\mathrm{B}(0, 2)$로부터 같은 거리에 있을 때, 사각형 ABOP의 넓이는? (단, O는 원점)

① 2　　② 4　　③ 6　　④ 8　　⑤ 10

해설



점 P의 좌표를 $(a,\ a)$으로 놓으면

$\overline{\mathrm{AP}} = \overline{\mathrm{BP}}$에서 $\sqrt{(a-2)^2 + (a-4)^2} = \sqrt{a^2 + (a-2)^2}$

양변 제곱하여 정리하면

$2a^2 - 12a + 20 = 2a^2 - 4a + 4$, $8a = 16$

$\therefore\ a = 2$

따라서 점 P의 좌표는 $(2,\ 2)$이므로 다음 그림에서

(□ABOP의 넓이)

$=$ (△OBP의 넓이) $+$ (△ABP의 넓이)

$= \frac{1}{2} \times 2 \times 2 + \frac{1}{2} \times 2 \times 2 = 4$