

1. 연립부등식 $\begin{cases} 4x < x + 4 \\ 3x - 1 \leq 5x + 7 \end{cases}$ 을 만족하는 정수의 개수를 구하여라.

▶ 답: 개

▷ 정답: 6 개

해설

$$\begin{aligned} \begin{cases} 4x < x + 4 \\ 3x - 1 \leq 5x + 7 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} 3x < 4 \\ 3x - 5x \leq 7 + 1 \end{cases} \\ &\Rightarrow \begin{cases} x < \frac{4}{3} \\ x \geq -4 \end{cases} \end{aligned}$$

따라서 $-4 \leq x < \frac{4}{3}$ 를 만족하는 정수는 $-4, -3, -2, -1, 0, 1$ 의 6개이다.

2. 다음 연립부등식을 만족하는 가장 큰 정수는?

$$\begin{cases} \frac{2}{5}(4x-1) > \frac{1}{3}(2x+3) \\ 0.5(x-9) < 0.2(x-3) \end{cases}$$

① 6

② 8

③ 10

④ 12

⑤ 13

해설

i) $\frac{2}{5}(4x-1) > \frac{1}{3}(2x+3)$ 의 양변에 15 를 곱해 주면,

$$\Rightarrow 6(4x-1) > 5(2x+3)$$

$$\Rightarrow x > \frac{3}{2}$$

ii) $0.5(x-9) < 0.2(x-3)$ 의 양변에 10 을 곱해 주면,

$$\Rightarrow 5(x-9) < 2(x-3)$$

$$\Rightarrow x < 13$$

$$\therefore \frac{3}{2} < x < 13$$

3. 연립부등식 $2x + a < x + 2 < 4(x - 1)$ 의 해가 $b < x < 5$ 일 때, $a + b$ 의 값은?

① -5

② -1

③ 1

④ 3

⑤ 5

해설

$$2x + a < x + 2 < 4(x - 1)$$

$$2x + a < x + 2 \rightarrow x < 2 - a$$

$$x + 2 < 4(x - 1) \rightarrow x > 2$$

$$2 < x < 2 - a \text{ 가 } b < x < 5 \text{ 이므로 } a = -3, b = 2$$

$$\therefore a + b = -1$$

4. 좌표평면 위의 두 점 $P(a, 3)$, $Q(1, a)$ 에 대하여 $\overline{PQ} = \sqrt{2}$ 일 때, a 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$$\overline{PQ} = \sqrt{(1-a)^2 + (a-3)^2} = \sqrt{2a^2 - 8a + 10}$$

$$\overline{PQ} = \sqrt{2} \text{ 이므로 } \sqrt{2a^2 - 8a + 10} = \sqrt{2}$$

$$\text{양변을 제곱하면 } 2a^2 - 8a + 10 = 2$$

$$2a^2 - 8a + 8 = 0, a^2 - 4a + 4 = 0, (a-2)^2 = 0$$

$$\therefore a = 2$$

5. 민수는 각각 a , $a+2$, $a+4$ 인 막대로 삼각형을 만들려고 한다. 민수가 삼각형을 만들 수 있는 a 의 범위를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $a > 2$

해설

삼각형은 가장 긴 변의 길이가 나머지 두 변의 길이의 합보다 작아야 하므로, $a+4 < a+(a+2)$ 이고 정리하면 $a > 2$ 이다.

6. 연립부등식 $\begin{cases} x^2 - 5x - 6 \leq 0 \\ (x+k)(x-1) > 0 \end{cases}$ 의 해가 $1 < x \leq 6$ 이 되도록 실수

k 의 값의 범위를 구하면?

① $k > 1$

② $k \geq 1$

③ $k < -1$

④ $k > -1$

⑤ $k \geq -1$

해설

$$x^2 - 5x - 6 \leq 0,$$

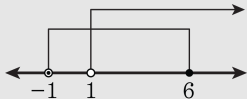
$$(x-6)(x+1) \leq 0,$$

$$-1 \leq x \leq 6$$

연립방정식의 해가 $1 < x \leq 6$ 이 되려면

$(x+k)(x-1) > 0$ 의 해는 $x > 1$, $x < -k$ 이어야 하고

다음 그림에서 k 의 범위는 $-k \leq -1$, $k \geq 1$



7. 재질이 고른 삼각형 모양의 널빤지를 좌표평면 위에 놓으니 세 꼭짓점의 좌표가 $A(9, 7)$, $B(2, 3)$, $C(7, 5)$ 가 되었다. 손가락을 수직으로 세워 이 널빤지를 그 위에 얹을 때 수평이 되도록 하기 위한 내부의 한 점의 좌표를 구하면?

① $(4, 5)$

② $(5, 5)$

③ $(5, 6)$

④ $(6, 5)$

⑤ $(6, 6)$

해설

수평이 유지되기 위해선 무게중심에 손가락을 세워야한다.
따라서 무게중심 G 는

$$G = \left(\frac{9 + 2 + 7}{3}, \frac{7 + 3 + 5}{3} \right) = (6, 5)$$

8. 두 원

$$A : x^2 + y^2 + 2x - 4 = 0,$$

$$B : x^2 + y^2 - 2ax + 2y - 6 = 0$$

에서 원 A 가 원 B 의 둘레를 이등분하면서 지날 때, a 의 값은?

① 0

② 1

③ 2

④ 3

⑤ 4

해설

원 B 가 원 A 의 둘레를 이등분하므로

두 원의 공통현이

원 A 의 중심을 지나야 한다.

공통현의 방정식은

$$(1+a)x - y + 1 = 0 \cdots \cdots \textcircled{7}$$

$$\text{한편, } x^2 + y^2 + 2x - 4 = 0$$

$$(x+1)^2 + y^2 = 5 \text{ 이므로}$$

$\textcircled{7}$ 이 점 $(-1, 0)$ 을 지나야 한다.

$$-1 - a + 1 = 0$$

$$\therefore a = 0$$

9. 두 원 $x^2 + y^2 - 4x = 0$, $x^2 + y^2 - 6y + 8 = 0$ 의 공통외접선의 길이는?

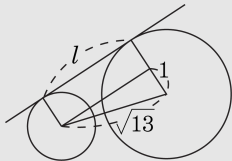
- ① $2\sqrt{3}$ ② $\sqrt{13}$ ③ $\sqrt{21}$ ④ $2\sqrt{6}$ ⑤ $3\sqrt{6}$

해설

$$(x-2)^2 + y^2 = 4, \quad x^2 + (y-3)^2 = 1$$

$$l = \sqrt{(\sqrt{13})^2 - 1^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$

∴ 외접선의 길이 : $2\sqrt{3}$



10. 점 $(1, -2)$ 를 지나는 직선을 점 $(2, 3)$ 에 대하여 대칭이동한 후 x 축에 대하여 대칭이동 하였더니 점 $(4, -4)$ 를 지난다고 한다. 처음 직선의 방정식을 구하면?

① $y = -4x + 2$

② $y = 4x + 2$

③ $y = -4x + 4$

④ $y = 4x + 4$

⑤ $y = -4x + 6$

해설

$(1, -2)$ 를 지나는 직선의 방정식을

$y + 2 = m(x - 1) \dots \textcircled{1}$ 이라 하면

①식을 점 $(2, 3)$ 에 대칭이동하면 (중점공식이용)

$x \rightarrow 4 - x$ $y \rightarrow 6 - y$ 이므로

$6 - y + 2 = m(4 - x - 1), y = m(x - 3) + 8 \dots \textcircled{2}$

직선 ②를 x 축에 대칭이동하면

$-y = m(x - 3) + 8 \dots \textcircled{3}$

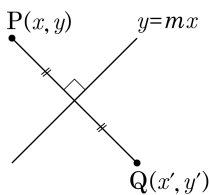
직선 ③이 점 $(4, -4)$ 를 지나므로

$4 = m(4 - 3) + 8 \therefore m = -4$

따라서 처음 직선의 방정식 ①은

$y + 2 = -4(x - 1), y = -4x + 2$

11. 다음은 직선 $y = mx$ 에 대한 점 $P(x, y)$ 의 대칭점을 구하는 과정이다. 빈 칸에 들어갈 수식을 순서대로 고르면?



대칭점을 $Q(x', y')$ 라 하면,

PQ 의 중점이 직선

$y = mx$ 위에 있으므로,

(가) = m (나),

또한 직선

PQ 와 직선 $y = mx$ 가 직교하므로

$$\frac{y' - y}{x' - x} = \text{(다)}$$

(가), (나), (다) 에 의하여

$$x' = \frac{1}{1 + m^2} \{ (1 - m^2)x + 2my \}$$

$$y' = \frac{1}{1 + m^2} \{ 2mx - (1 - m^2)y \}$$

- ① (가): $y + y'$, (나): $x + x'$, (다): $-\frac{1}{m}$
 ② (가): $\frac{y + y'}{2}$, (나): $\frac{x + x'}{2}$, (다): $-\frac{1}{m}$
 ③ (가): $\frac{y + y'}{2}$, (나): $\frac{x + x'}{2}$, (다): $\frac{1}{m}$
 ④ (가): $\frac{y + y'}{3}$, (나): $\frac{x + x'}{3}$, (다): $\frac{1}{m}$
 ⑤ (가): $\frac{y + y'}{3}$, (나): $\frac{x + x'}{3}$, (다): $\frac{1}{m^2}$

해설

(가), (나) : $P = (x, y)$, $Q = (x', y')$ 이므로

중점은 $\left(\frac{x + x'}{2}, \frac{y + y'}{2} \right)$ 이다.

(다): 두 직선이 직교하면 기울기의 곱이 -1 이다.

$$\Rightarrow m \times \text{(다)} = -1$$

$$\therefore \text{(다)} : -\frac{1}{m}$$

12. $a + b + c = 0$ 일 때, 다음 중 $2a^2 + bc$ 와 같은 것은?

① $(a - c)^2$

② $(b + c)^2$

③ $(a + b)(b + c)$

④ $(a - b)(a - c)$

⑤ $(a - b)(a + c)$

해설

$$\begin{aligned} 2a^2 + bc &= 2a^2 - b(a + b) \quad (\because c = -a - b) \\ &= 2a^2 - ab - b^2 \\ &= (a - b)(2a + b) \\ &= (a - b)(a + b + a) \\ &= (a - b)(a - c) \quad (\because a + b = -c) \end{aligned}$$

13. $x^2 + 5xy + ay^2 + y - 2$ 가 x, y 의 두 일차식의 곱으로 나타내어질 때, 상수 a 의 값은?

① $\frac{8}{49}$

② $\frac{49}{8}$

③ 49

④ 8

⑤ 0

해설

$x^2 + 5xy + ay^2 + y - 2$ 를 x 에 대해 정리하면

$$x^2 + 5yx + ay^2 + y - 2$$

이 이차식이 두 개의 일차식으로 인수분해 되려면
판별식이 완전제곱식이 되어야 한다.

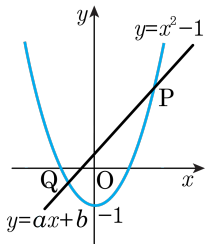
$$D = (25 - 4a)y^2 - 4y + 8$$

$$\frac{D'}{4} = 4 - 8(25 - 4a) = 0,$$

$$4 - 200 + 32a = 0$$

$$\therefore a = \frac{49}{8}$$

14. 이차함수 $y = x^2 - 1$ 의 그래프와 직선 $y = ax + b$ 가 다음 그림과 같이 두 점 P, Q에서 만난다. 점 P의 x 의 좌표가 $1 + \sqrt{2}$ 일 때, $2a + b$ 의 값을 구하여라. (단, a, b 는 유리수이다.)



▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

이차함수 $y = x^2 - 1$ 의 그래프와 직선 $y = ax + b$ 의 한 교점 P의 x 좌표가 $1 + \sqrt{2}$ 이므로 $1 + \sqrt{2}$ 는 이차방정식 $x^2 - 1 = ax + b$ 의 근이다.

$$(1 + \sqrt{2})^2 - 1 = a(1 + \sqrt{2}) + b$$

$$2 + 2\sqrt{2} = a + b + a\sqrt{2}$$

a, b 가 유리수이므로 무리수가 서로 같을 조건에 의하여

$$2 = a + b, \quad 2 = a$$

$$\therefore a = 2, \quad b = 0$$

15. 둘레의 길이가 48cm 인 직사각형 중에서 그 넓이가 최대가 되도록 하는 직사각형의 가로, 세로의 길이를 순서대로 써라.

▶ 답 : cm

▶ 답 : cm

▷ 정답 : 12cm

▷ 정답 : 12cm

해설

가로, 세로의 길이를 각각 x cm, $(24 - x)$ cm 라 하면

$$\begin{aligned}y &= x(24 - x) \\&= -x^2 + 24x \\&= -(x - 12)^2 + 144\end{aligned}$$

$x = 12$ 일 때, 최댓값 144를 갖는다.

$$\therefore x = 12, 24 - x = 12$$

따라서 가로의 길이는 12 cm, 세로의 길이도 12 cm

16. 연립부등식 $\begin{cases} 6 < -x + 2 < -2x - 1 \\ |x| < a \end{cases}$ 의 해가 없을 때, 양수 a 의 값의 범위를 구하여라.

① $3 < a \leq 4$

② $0 < a \leq 3$

③ $0 < a < 3$

④ $0 < a \leq 4$

⑤ $0 < a < 4$

해설

$$\begin{cases} 6 < -x + 2 < -2x - 1 \cdots \textcircled{㉠} \\ |x| < a \cdots \textcircled{㉡} \end{cases}$$

㉠에서 $6 < -x + 2$ 의 해는 $x < -4$

$-x + 2 < -2x - 1$ 의 해는 $x < -3$

$$\therefore x < -4$$

㉡에서 $|x| < a$ 는 $-a < x < a$ 두 연립부등식의 해가 없으려면

$$-a \geq -4, a \leq 4,$$

그런데 a 는 양수이므로 a 의 값의 범위는 $0 < a \leq 4$ 이다.

17. 제주시에서 남서쪽 1100 km 해상에 태풍의 중심이 있다. 이 태풍은 중심에서 반지름 50 km 이내가 폭풍우권이며, 30 km/h의 속도로 북동진한다. 지름도 10 km/h씩 넓어진다. 제주시가 폭풍우권 내에 들어있는 시간은? (단, 제주시는 점으로 생각하고, 태풍은 직진한다고 가정한다.)

① 15시간

② 16시간

③ 30시간

④ 46시간

⑤ 50시간

해설

$$|-1100 + 30x - 0| \leq 50 + 5x$$

$$-50 - 5x \leq -1100 + 30x \leq 50 + 5x$$

$$25x \leq 1150 \text{ 에서 } x \leq 46$$

$$35x \geq 1050 \text{ 에서 } x \geq 30$$

$$\therefore 30 \leq x \leq 46$$

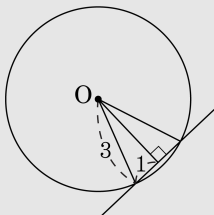
따라서, 제주시가 폭풍우권 내에 들어있는 시간은 $46 - 30 = 16$ (시간)이다.

18. 직선 $y = x + m$ 이 원 $x^2 + y^2 = 9$ 에 의하여 잘린 현의 길이가 2 일 때, m^2 의 값을 구하면?

▶ 답 :

▷ 정답 : 16

해설



위 그림을 보면 원과 직선사이 거리가

$\sqrt{3^2 - 1^2} = 2\sqrt{2}$ 임을 알 수 있다.

이제 공식을 사용하면,

$$\frac{|m|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = 2\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow m = \pm 4$$

$$\therefore m^2 = 16$$

19. 두 점 $A(4, 1), B(5, 1)$ 을 직선 $x - y + 1 = 0$ 에 대하여 대칭이동시킨 점을 각각 C, D 라 할 때, 사각형 $ABCD$ 의 넓이는?

① 3

② $\frac{9}{2}$

③ $\frac{22}{3}$

④ 9

⑤ $\frac{33}{2}$

해설

점 $A(4, 1)$ 의 대칭점을 $C(a, b)$ 라 하면 $\overline{AC}$ 의 중점

$M\left(\frac{a+4}{2}, \frac{b+1}{2}\right)$ 이 직선 $x - y + 1 = 0$ 위에 있으므로 대입하면

$$\frac{a+4}{2} - \frac{b+1}{2} + 1 = 0$$

$$\therefore a - b + 5 = 0 \cdots \textcircled{1}$$

또 직선 AC 는 직선 $x - y + 1 = 0$ 에 수직이므로

$$\frac{b' - 1}{a - 4} \times 1 = -1$$

$$\therefore a + b - 5 = 0 \cdots \textcircled{2}$$

①, ②를 연립하면 $a = 0, b = 5$

$\therefore C(0, 5)$

같은 방법으로 점 $B(5, 1)$ 의 대칭점 $D(0, 6)$ 이다.

따라서 사각형 $ABCD$ 의 넓이는 $\frac{1}{2} \times 5 \times 5 - \frac{1}{2} \times 4 \times 4 = \frac{9}{2}$

20. 다음 식의 분모를 0으로 만들지 않는 모든 실수 x 에 대하여

$$\frac{1}{(x-1)(x-2) \times \cdots \times (x-2007)}$$

$$= \frac{a_1}{x-1} + \frac{a_2}{x-2} + \cdots + \frac{a_{2007}}{x-2007}$$

이 성립할 때, $a_1 + a_2 + \cdots + a_{2007}$ 의 값을 구하면?

① 1

② -1

③ 1997

④ 0

⑤ -1997

해설

우변을 통분하면

$$\frac{(a_1 + a_2 + \cdots + a_{2007})x^{2006} + \cdots}{(x-1)(x-2) \times \cdots \times (x-2007)}$$

$$= \frac{1}{(x-1)(x-2) \times \cdots \times (x-2007)}$$

주어진 등식은 항등식이므로 분자의 계수를 비교하면

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_{2007} = 0$$

21. x 에 대한 다항식 $x^{10}(x^2 + ax + b)$ 를 $(x-2)^2$ 으로 나눈 나머지가 $2^{10}(x-2)$ 일 때, 상수 a, b 에 대하여 $3b - 2a$ 의 값은?

① 3

② 6

③ 8

④ 10

⑤ 12

해설

$$x^{10}(x^2 + ax + b) = (x-2)^2 Q(x) + 2^{10}(x-2)$$

$$x^{10}(x^2 + ax + b) = (x-2) \{ (x-2) Q(x) + 2^{10} \} \text{이므로}$$

$$x^2 + ax + b = (x-2)(x-\alpha) \text{라 할 수 있다.}$$

$$x^{10}(x-2)(x-\alpha) = (x-2) \{ (x-2) Q(x) + 2^{10} \}$$

$$\therefore x^{10}(x-\alpha) = (x-2) Q(x) + 2^{10}$$

양변에 $x=2$ 를 대입하면

$$2^{10}(2-\alpha) = 2^{10} \therefore \alpha = 1$$

$$\therefore x^2 + ax + b = (x-2)(x-1)$$

$$= x^2 - 3x + 2$$

$$a = -3, b = 2$$

$$\therefore 3b - 2a = 12$$

22. $P(x) = x^2 + x + 1$ 에 대하여 $P(x^6)$ 을 $P(x)$ 로 나눈 나머지를 구하면?

① $x - 4$

② $4x - 1$

③ 5

④ 4

⑤ 3

해설

$$P(x^6) = x^{12} + x^6 + 1$$

$x^2 + x + 1 = 0$ 의 해를 w 라 하자.

$w^2 + w + 1 = 0$, 양변에 $(w - 1)$ 을 곱하면

$$w^3 - 1 = 0, w^3 = 1$$

$$x^{12} + x^6 + 1 = (x^2 + x + 1)Q(x) + ax + b \text{ 에}$$

w 를 대입하면,

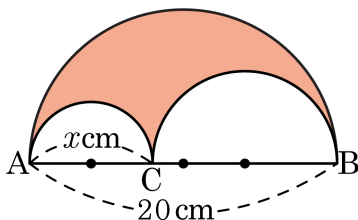
$$(w^3)^4 + (w^3)^2 + 1 = (w^2 + w + 1)Q(w) + aw + b$$

$$3 = aw + b$$

w 는 허수, a, b 는 실수 이므로, $a = 0, b = 3$

$\therefore$ 나머지 = 3

23. 다음 그림과 같이 세 개의 반원으로 이루어진 도형이 있다. 큰 반원의 지름이 20 cm 이고 색칠한 부분의 넓이가 $y\pi \text{ cm}^2$ 일 때, y 의 최댓값을 구하면?



① 10

② 15

③ 16

④ 25

⑤ 36

해설

$\overline{AC} = x \text{ cm}$ 이므로 $\overline{BC} = (20 - x) \text{ cm}$ 이다.

따라서 색칠한 부분의 넓이 S 는

(전체 반원의 넓이 - 작은 두 원의 넓이의 합)이다.

$$\frac{1}{2} \times 10^2 \pi - \left\{ \frac{1}{2} \pi \left(\frac{x}{2} \right)^2 + \frac{1}{2} \pi \left(\frac{20 - x}{2} \right)^2 \right\} = y\pi$$

$$50\pi - \left(\frac{x^2}{8} \pi + \frac{400 - 40x + x^2}{8} \pi \right) = y\pi$$

$$50\pi - \left(\frac{2x^2 - 40x + 400}{8} \right) \pi = y\pi$$

$$-\frac{1}{4}x^2\pi + 5x\pi = y\pi$$

$$\begin{aligned} y\pi &= -\frac{1}{4}\pi(x^2 - 20x) \\ &= -\frac{1}{4}\pi(x^2 - 20x + 100 - 100) \\ &= -\frac{1}{4}\pi(x - 10)^2 + 25\pi \text{이다.} \end{aligned}$$

따라서 두 원의 반지름이 각각 10 cm 일 때, 넓이는 최댓값 $25\pi \text{ cm}^2$ 를 갖는다.

24. 연립부등식 $5x - 8 < 3x + 8$, $x - 5 > -2a$ 를 만족하는 x 중 자연수들의 합이 22 일 때, 자연수 a 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 1

해설

$5x - 8 < 3x + 8$ 을 풀면 $x < 8$

$x - 5 > -2a$ 를 풀면 $x > -2a + 5$

$\therefore -2a + 5 < x < 8$

이 부등식을 만족하는 자연수 x 의 합이 22 이므로

$x = 4, 5, 6, 7$

따라서 $3 \leq -2a + 5 < 4$ 이어야 하므로

$$\frac{1}{2} < a \leq 1$$

그런데 a 가 자연수이므로 $a = 1$ 이다.

25. 직선 $y = x$ 위의 점 P가 두 점 A(2,4), B(0,2)로부터 같은 거리에 있을 때, 사각형 ABOP의 넓이는? (단, O는 원점)

① 2

② 4

③ 6

④ 8

⑤ 10

해설

점 P의 좌표를 (a, a) 으로 놓으면
 $\overline{AP} = \overline{BP}$ 에서 $\sqrt{(a-2)^2 + (a-4)^2} = \sqrt{a^2 + (a-2)^2}$

양변 제곱하여 정리하면

$$2a^2 - 12a + 20 = 2a^2 - 4a + 4, 8a = 16$$

$$\therefore a = 2$$

따라서 점 P의 좌표는 (2, 2)이므로 다음 그림에서
 (□ABOP의 넓이)

$$= (\triangle OBP \text{의 넓이}) + (\triangle ABP \text{의 넓이})$$

$$= \frac{1}{2} \times 2 \times 2 + \frac{1}{2} \times 2 \times 2 = 4$$

