

1. 다음 방정식의 모든 해의 합을 구하여라.

$$x^4 - 13x^2 + 36 = 0$$

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

$x^4 - 13x^2 + 36 = 0$ 에서

$x^2 = t$ 로 놓으면

$$t^2 - 13t + 36 = 0, (t - 4)(t - 9) = 0$$

$$\therefore t = 4 \text{ 또는 } t = 9$$

$$(i) \ t = 4 \text{ 일 때, } x^2 = 4$$

$$\therefore x = \pm 2$$

$$(ii) \ t = 9 \text{ 일 때, } x^2 = 9$$

$$\therefore x = \pm 3$$

따라서 모든 해의 합은

$$(-2) + 2 + (-3) + 3 = 0$$

2. x, y 에 대한 연립방정식 $\begin{cases} ax - y = a \\ x - ay = 1 \end{cases}$ 이 오직 한 쌍의 해를 갖도록 하는 a 값은?

① $a = -1$

② $a = 1$

③ $a = \pm 1$

④ $a \neq \pm 1$ 인 모든 실수

⑤ 없다.

해설

연립방정식이 오직 한 쌍의 해를 가지려면

$$\frac{a}{1} \neq \frac{-1}{-a}, -a^2 \neq -1$$

$$\therefore a \neq \pm 1$$

따라서 오직 한 쌍의 해를 갖도록 하는 a 의 값은 $a \neq \pm 1$ 인 모든 실수이다.

3. 가로,의 길이가 세로의 길이보다 5 cm 더 긴 직사각형이 있다. 둘레의 길이가 34 cm 일 때, 이 직사각형의 가로,의 길이와 세로의 길이의 곱을 구하여라.(단, 단위 생략)

▶ 답 :

▷ 정답 : 66

해설

직사각형의 가로, 세로의 길이를 각각 x cm, y cm 라 하면



$$x = y + 5 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉠}$$

또, 이 직사각형의 둘레는 $2(x + y)$ 이므로

$$2(x + y) = 34 \text{ 즉, } x + y = 17 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉡}$$

㉠을 ㉡에 대입하면

$$y + 5 + y = 17, \quad 2y = 12$$

$$\therefore y = 6$$

$$y = 6 \text{ 을 } \textcircled{㉠} \text{ 에 대입하면 } x = 11$$

$$\therefore xy = 11 \times 6 = 66$$

4. $x^3 = 1$ 의 한 허근을 ω 라 할 때, 다음 <보기> 중 옳은 것의 개수는?

보기

㉠ $\omega^3 = 1$

㉡ $\omega^2 + \omega + 1 = 0$

㉢ $\bar{\omega} = \omega^2 = \frac{1}{\omega}$

㉣ $\omega + \bar{\omega} = 1$

㉤ $\omega\bar{\omega} = 1$

㉥ $\omega^{2005} + \frac{1}{\omega^{2005}} = -1$

① 1개

② 2개

③ 3개

④ 4개

⑤ 5개

해설

$$x^3 = 1 \Rightarrow \omega^3 = 1 \cdots \text{㉠}(\bigcirc)$$

$$x^3 - 1 = 0 \Rightarrow (x - 1)(x^2 + x + 1) = 0$$

$$\Rightarrow \omega^2 + \omega + 1 = 0 \cdots \text{㉡}(\bigcirc)$$

$\therefore$ 근과 계수와의 관계에 의해

$$\omega + \bar{\omega} = -1, \omega\bar{\omega} = 1 \cdots \text{㉣}(\times), \text{㉤}(\bigcirc)$$

$$\omega + \bar{\omega} = -1 \text{ 이므로}$$

$$\omega^2 + \omega + 1 = \omega^2 - 1 - \bar{\omega} + 1 = 0$$

$$\Rightarrow \omega^2 = \bar{\omega} \cdots \text{㉢}(\bigcirc)$$

$$\omega^{2005} + \frac{1}{\omega^{2005}}$$

$$= (\omega^3)^{668} \omega + \frac{1}{(\omega^3)^{668} \omega}$$

$$= \omega + \frac{1}{\omega} = -1$$

$$(\because \omega^2 + \omega + 1 = 0) \cdots \text{㉥}(\bigcirc)$$

5. 방정식 $2x^4 - x^3 - 6x^2 - x + 2 = 0$ 을 풀면?

① $x = -1$ (증근), $-\frac{1}{2}$, 2

② $x = -1$ (증근), $\frac{1}{2}$, 1

③ $x = -1$ (증근), $\frac{1}{2}$, 2

④ $x = -1, \frac{1}{2}, 2$ (증근)

⑤ $x = -1, \frac{1}{2}$ (증근), 2

해설

$f(x) = 2x^4 - x^3 - 6x^2 - x + 2$ 라 하면 $f(-1) = 0$, $f(2) = 0$ 이므로 $(x+1)(x-2)$ 를 인수로 갖는다.

-1	2	-1	-6	-1	2
	-2	3	3	-2	
	2	-3	-3	2	0
2		4	2	-2	
	2	1	-1	0	

조립제법에 의하면 주어진 방정식은

$$(x+1)(x-2)(2x^2+x-1) = 0$$

$$(x+1)^2(x-2)(2x-1) = 0$$

$$\therefore x = -1, \frac{1}{2}, 2$$

6. 다음 방정식의 실근의 합을 구하여라.

$$x^4 + 5x^3 - 12x^2 + 5x + 1 = 0$$

▶ 답 :

▷ 정답 : -6

해설

$x = 0$ 을 대입하면

$1 = 0$ 이 되어 모순이므로 $x \neq 0$ 이다.

따라서, 주어진 식의 양변을

x^2 으로 나누면

$$x^2 + 5x - 12 + \frac{5}{x} + \frac{1}{x^2} = 0$$

$$\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 5\left(x + \frac{1}{x}\right) - 12 = 0$$

$$\therefore \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 + 5\left(x + \frac{1}{x}\right) - 14 = 0$$

여기서 $x + \frac{1}{x} = X$ 로 놓으면

$$X^2 + 5X - 14 = 0, (X + 7)(X - 2) = 0$$

$$\therefore X = -7 \text{ 또는 } X = 2$$

(i) $X = -7$ 일 때,

$$x + \frac{1}{x} = -7 \text{에서}$$

$$x^2 + 7x + 1 = 0$$

$$\therefore \frac{-7 \pm 3\sqrt{5}}{2}$$

(ii) $X = 2$ 일 때,

$$x + \frac{1}{x} = 2 \text{에서}$$

$$x^2 - 2x + 1 = 0, (x - 1)^2 = 0$$

$$\therefore x = 1$$

(i), (ii)로부터

$$x = 1(\text{중근}) \text{ 또는 } x = \frac{-7 \pm 3\sqrt{5}}{2}$$

따라서, 모든 근의 합은

$$1 + \frac{-7 + 3\sqrt{5}}{2} + \frac{-7 - 3\sqrt{5}}{2} = -6 \text{이다.}$$

7. x 의 3차방정식 $x^3 - (3k+1)x + 3k = 0$ 이 중근을 갖도록 하는 실수 k 의 값들의 합은?

① $\frac{7}{12}$

② $\frac{7}{5}$

③ $\frac{7}{4}$

④ $\frac{7}{3}$

⑤ $\frac{7}{2}$

해설

주어진 식의 좌변을 인수분해하면

$$(x-1)(x^2+x-3k)=0$$

$$\therefore x=1 \text{ 또는 } x^2+x-3k=0$$

여기에서 $x^2+x-3k=0$ 이 중근을 가질 때는 $D=1+12k=0$

$$\therefore k=-\frac{1}{12}$$

또, $x^2+x-3k=0$ 이 $x=1$ 이라는 근을 가져도 그 근은 중근이 되므로

$$1+1-3k=0$$

$$\therefore k=\frac{2}{3}$$

$$\therefore -\frac{1}{12} + \frac{2}{3} = \frac{-1+8}{12} = \frac{7}{12}$$

8. 삼차방정식 $x^3 + 2x^2 + 3x + 4 = 0$ 의 세 근을 α, β, γ 라 할 때,
 $\frac{\beta + \gamma}{\alpha} + \frac{\gamma + \alpha}{\beta} + \frac{\alpha + \beta}{\gamma}$ 의 값을 구하면?

① $-\frac{1}{2}$

② $-\frac{3}{4}$

③ -1

④ $-\frac{3}{2}$

⑤ -2

해설

삼차 방정식의 근과 계수의 관계에서

$$\alpha + \beta + \gamma = -2, \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = 3, \alpha\beta\gamma = -4$$

$\beta + \gamma = -2 - \alpha, \gamma + \alpha = -2 - \beta, \alpha + \beta = -2 - \gamma$ 를 이용하면

$$(\text{주어진 식}) = \frac{-2 - \alpha}{\alpha} + \frac{-2 - \beta}{\beta} + \frac{-2 - \gamma}{\gamma}$$

$$= -2 \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} \right) - 3$$

$$= -2 \left(\frac{\beta\gamma + \alpha\gamma + \alpha\beta}{\alpha\beta\gamma} \right) - 3 = -\frac{3}{2}$$

9. 다음 x 에 관한 두 개의 이차방정식 $\begin{cases} x^2 - 2x + a^2 = 0 \cdots \textcircled{\text{㉠}} \\ x^2 - ax + 2a = 0 \cdots \textcircled{\text{㉡}} \end{cases}$

에서 공통근이 오직 한 개일 때, a 의 값과 공통근 k 를 구하면?(단, a 는 실수)

① $a = 0$ 일 때 $k = 0$, $a = -1$ 일 때, $k = 1$

② $a = 2$ 일 때 $k = 1 \pm \sqrt{3}i$

③ $a = 1$ 일 때 $k = 1$, $a = 2$ 일 때, $k = 1$

④ $a = 3$ 일 때 $k = 2 \pm \sqrt{3}$

⑤ $a = 2$ 일 때 $k = -1$, $a = 3$ 일 때, $k = 1$

해설

공통근을 $x = k$ 라 하면

$$k^2 - 2k + a^2 = 0 \cdots \textcircled{1}$$

$$k^2 - ka + 2a = 0 \cdots \textcircled{2}$$

두 식을 빼주면, $(k + a)(a - 2) = 0$

$$\therefore a = 2 \text{ 또는 } k = -a$$

i) $a = 2$ 일 때

①, ②이 같아지므로 성립하지 않는다.

ii) $k = -a$ 일 때

①에 넣으면 $a = 0$ 또는 $a = -1$

$$\begin{cases} a = 0 \text{ 이면 } k = 0 \\ a = -1 \text{ 이면 } k = 1 \end{cases}$$

10. $2 - \sqrt{3}$ 이 방정식 $x^3 - 2x^2 + px + q = 0$ 의 한 근임을 이용하여 유리수 p, q 의 값을 구하면?

① $p = -7, q = 2$

② $p = 7, q = -3$

③ $p = 4, q = 1$

④ $p = 3, q = -2$

⑤ $p = 2, q = \sqrt{3}$

해설

$x^3 - 2x^2 + px + q = 0$ 의 한 근이 $2 - \sqrt{3}$ 이면 $2 + \sqrt{3}$ 도 근이다.
다른 한근을 α 라 하면 세 근의 합에서

$$2 - \sqrt{3} + 2 + \sqrt{3} + \alpha = 4 + \alpha = 2 \text{ 이므로}$$

$$\alpha = -2$$

$$\begin{aligned} \text{따라서 } p &= -2(2 - \sqrt{3}) - 2(2 + \sqrt{3}) + (2 - \sqrt{3})(2 + \sqrt{3}) \\ &= -4 + 2\sqrt{3} - 4 - 2\sqrt{3} + 4 - 3 = -7 \text{ 이므로 } p = -7 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{또 세근의 곱 } -q &= (-2)(2 - \sqrt{3})(2 + \sqrt{3}) = -2(4 - 3) = -2 \\ \text{따라서 } q &= 2 \end{aligned}$$

11. 방정식 $x^3 - 5x^2 + 2x + 1 = 0$ 의 세 근을 α, β, γ 라 할 때, $(1 - \alpha)(1 - \beta)(1 - \gamma)$ 의 값을 구하면?

① -2

② -1

③ 0

④ 1

⑤ 2

해설

$$\begin{aligned} \alpha + \beta + \gamma &= 5, \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = 2, \alpha\beta\gamma = -1 \text{ 이므로} \\ (1 - \alpha)(1 - \beta)(1 - \gamma) \\ &= 1 + (\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha) - \alpha\beta\gamma - (\alpha + \beta + \gamma) \\ &= 1 + 2 - (-1) - 5 = -1 \end{aligned}$$

12. 허수 w 가 $\omega^3 = 1$ 을 만족할 때, $\omega + \omega^2 + \omega^3 + \omega^4 + \omega^5$ 의 값은?

① -2

② -1

③ 0

④ 1

⑤ 2

해설

$$\begin{aligned}\omega^3 = 1 &\Rightarrow (\omega - 1)(\omega^2 + \omega + 1) = 0 \\ &\Rightarrow \omega^2 + \omega + 1 = 0, \omega^3 = 1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore \omega + \omega^2 + \omega^3 + \omega^4 + \omega^5 \\ &= \omega + \omega^2 + 1 + \omega + \omega^2 \\ &= (\omega^2 + \omega + 1) + \omega^2 + \omega = -1\end{aligned}$$