1. 무리함수 $y = \sqrt{a-x} - 1$ 의 그래프가 원점을 지나고 정의역이 $\{x \mid x \le \alpha\}$, 치역이 $\{y \mid y \ge \beta\}$ 일 때, $a + \alpha + \beta$ 의 값을 구하면?

① -2　② -1　③ 0　④ 1　⑤ 2

해설

주어진 무리함수의 그래프가
점 $(0,\ 0)$ 을 지나므로
$0 = \sqrt{a-1}$
$\therefore a = 1$
즉, 주어진 무리함수는 $y = \sqrt{1-x} - 1$ 이고
$1 - x \ge 0$ 에서 $x \le 1$ 이므로
정의역은 $\{x \mid x \le 1\}$
$\therefore \alpha = 1$
또, $y = \sqrt{1-x} - 1$ 에서
$y + 1 = \sqrt{1-x} - 1$이므로 $y + 1 \ge 0$
치역은 $\{y \mid y \ge -1\}$
$\therefore \beta = -1$
$\therefore a + \alpha + \beta = 1$

2. 함수 $y = -\sqrt{a-x}+b$ 의 정의역이 $\{ x \mid x \leq 4 \}$이고, 그래프가 점 $(-5,\ 2)$를 지날 때, 이 함수의 치역은?

① $\{ y \mid y \geq 1 \}$ ② $\{ y \mid y \leq 3 \}$ ③ $\{ y \mid y \geq 3 \}$

④ $\{ y \mid y \leq 5 \}$ ⑤ $\{ y \mid y \geq 5 \}$

해설

$a - x \geq 0$ 에서 $x \leq a$

$\therefore\ a = 4$

$y = -\sqrt{4-x}+b$ 의 그래프가 점 $(-5,\ 2)$ 를 지나므로 $2 = -\sqrt{4-(-5)}+b$

$\therefore\ b = 5$

따라서 주어진 함수의 치역은 $\{ y \mid y \leq 5 \}$

3. 함수 $y = \sqrt{-2x+a}$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동하였더니 함수 $y = \sqrt{-2x+4}-3$의 그래프와 겹쳐졌다. 이 때, 상수 a, b의 값을 각각 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : $a = 2$

▷ 정답 : $b = -3$

해설

함수 $y = \sqrt{-2x+a}$의 그래프를
x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 b만큼
평행이동한 함수의 그래프의 식은
$y = \sqrt{-2(x-1)+a}+b = \sqrt{-2x+2+a}+b$
이 식이 $y = \sqrt{-2x+4}-3$과 같으므로
$2+a = 4,\ b = -3$
$\therefore\ a = 2,\ b = -3$

4. 무리함수 $y = \sqrt{ax}$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼 평행이동한 후 y축에 대하여 대칭이동하면 점 $(1,\ 3)$을 지난다. 이 때, 상수 a의 값은?

① -3　　② -2　　③ -1　　④ 2　　⑤ 3

해설

$y = \sqrt{ax}$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼
평행 이동한 함수의 그래프의 식은
$y = \sqrt{a(x-2)}$
이것을 다시 y축에 대하여 대칭이동한 함수의
그래프의 식은 $y = \sqrt{a(-x-2)}$
이 때, 이 그래프가 점 $(1,\ 3)$을 지나므로
$3 = \sqrt{-3a},\ -3a = 9$
$\therefore\ a = -3$

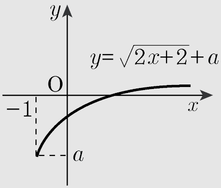
5. 함수 $y = \sqrt{2x+2} + a$ 의 그래프가 제 1 , 3 , 4 사분면을 지나도록 하는 정수 a 의 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -2

해설

$y = \sqrt{2x+2} + a = \sqrt{2(x+1)} + a$
주어진 함수는 $y = \sqrt{2x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 -1 만큼, y 축의 방향으로 a 만큼 평행이동한 것이다.
따라서 이 함수의 그래프가 제 1 , 3 , 4 사분면을 지나려면 $x = 0$ 일 때, $y < 0$ 이어야 한다.



$\sqrt{2} + a < 0$ 이므로 $a < -\sqrt{2}$
따라서 정수 a 의 최댓값은 -2 이다.

6. 다음 중 함수의 그래프가 제 1 사분면을 지나지 않는 것을 모두 고르면?

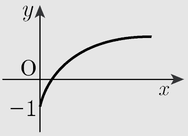
① $y=\sqrt{2x}-1$ ② $y=\sqrt{x}+1$

③ $y=-\sqrt{2-x}$ ④ $y=-\sqrt{x-2}-1$

⑤ $y=\sqrt{1-x}+1$

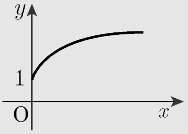
해설

① 제 1, 4 사분면을 지난다.



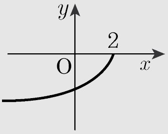
$y=\sqrt{2x}-1$

② 제 1 사분면을 지난다.



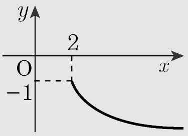
$y=\sqrt{x}+1$

③ 제 3, 4 사분면을 지난다.



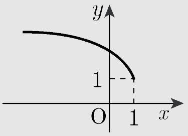
$y=-\sqrt{2-x}$

④ 제 4 사분면을 지난다.



$y=-\sqrt{x-2}-1$

⑤ 제 1, 2 사분면을 지난다.



$y=\sqrt{1-x}+1$

따라서 그래프가 제 1 사분면을 지나지 않는 것은 ③, ④이다.

7. 다음 보기에서 무리함수 $y = -\sqrt{a(x-1)} + 1$의 그래프에 대한 설명으로 옳은 것을 모두 고른 것은?

보기

㉠ $a = -1$이면 그래프는 제2사분면을 지난다.

㉡ $a > 0$이면 치역은 $\{y|y \leq 1\}$이다.

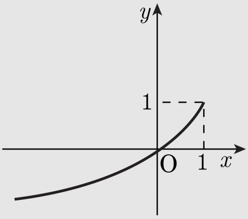
㉢ $a < 0$이면 치역은 $\{y|y \leq 1\}$이다.

㉣ $y = \sqrt{x} + 1$의 그래프와 만날 수 있다.

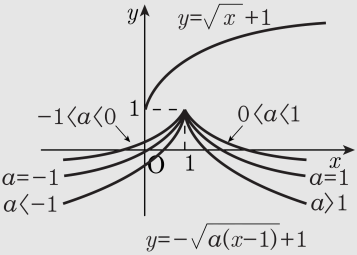
① ㉠, ㉡ ② ㉠, ㉢ ③ ㉠, ㉣ ④ ㉡, ㉢ ⑤ ㉡, ㉣

해설

㉠ $a = -1$이면 주어진 무리함수는
$y = -\sqrt{-(x-1)} + 1$
$y = -\sqrt{-x}$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼,
y축의 방향으로 1만큼 평행이동한
것이므로 그래프는 오른쪽과 같다.
따라서 그래프는 제2사분면을 지나지 않는다.



㉡,㉢ $a > 0$ 또는 $a < 0$일 때
항상 $\sqrt{a(x-1)} \geq 0$이므로 치역은 $\{y|y \leq 1\}$
㉣ $y = -\sqrt{a(x-1)} + 1$의 그래프는
아래와 같으므로 $y = \sqrt{x} + 1$의
그래프와 만나지 않는다.
따라서 옳은 것은 ㉡,㉢이다.



8. 함수 $y = a\sqrt{x}$ 에 대하여 옳지 <u>않은</u> 것을 모두 고른 것은? (단, $a \neq 0$)

㉠ 정의역은 $\{x \mid x \geq 0\}$ 이다. ㉡ $a > 0$ 이면 제 2 사분면을 지난다. ㉢ $y = a\sqrt{-x}$ 의 그래프와 x 축에 대하여 대칭이다.

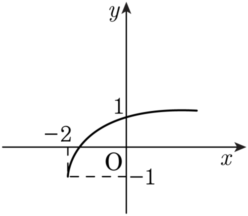
① ㉠ ② ㉡ ③ ㉠, ㉡

④ ㉡, ㉢ ⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

㉡ $a > 0$ 이면 제 1 사분면을 지난다.
㉢ $y = a\sqrt{-x}$ 의 그래프와 y 축에 대하여 대칭이다.
따라서 옳지 않은 것은 ㉡, ㉢ 이다.

9. 함수 $y = a\sqrt{x+b}+c$ 의 그래프가 다음 그림과 같을 때, 이 그래프와 x 축의 교점의 좌표는? (단, a, b, c 는 상수)



① $\left(-\frac{3}{2}, 0\right)$
② $\left(-\frac{4}{3}, 0\right)$
③ $\left(-\frac{5}{3}, 0\right)$
④ $\left(-\sqrt{2}, 0\right)$
⑤ $\left(-\sqrt{3}, 0\right)$

해설

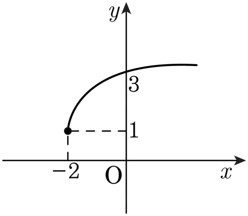
함수 $y = a\sqrt{x+b}+c$ 의 그래프는
함수 $y = a\sqrt{x}$ 의 그래프를
x 축의 방향으로 $-b$ 만큼, y 축의 방향으로 c 만큼
평행이동 시킨 것이므로 $b = 2,\ c = -1$
$\therefore y = a\sqrt{x+b}+c = a\sqrt{x+2}-1$
한편, 이 그래프는 점 $(0,\ 1)$ 을 지나므로
$1 = a\sqrt{0+2}-1 \quad \therefore a = \sqrt{2}$
따라서, 함수 $y = \sqrt{2}\sqrt{x+2}-1$ 의 그래프와
x 축의 교점의 x 좌표를 구하면
$0 = \sqrt{2}\sqrt{x+2}-1$

$$\Rightarrow \sqrt{x+2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow x+2 = \frac{1}{2}$$

$$\therefore x = -\frac{3}{2}$$

10. 무리함수 $y = \sqrt{ax+b}+c$의 그래프가 다음 그림과 같을 때, $a+b+c$의 값을 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : 7

해설

주어진 그래프는 $y = \sqrt{ax}$ 의 그래프를 x 축으로 -2 만큼, y 축으로 1만큼 평행이동한 것과 같으므로 $y = \sqrt{a(x+2)}+1$
또, 점 $(0,\ 3)$ 을 지나므로
$3 = \sqrt{2a}+1,\ \ \sqrt{2a} = 2$
$\therefore\ \ a = 2$
따라서 $y = \sqrt{2(x+2)}+1 = \sqrt{2x+4}+1$ 이고,
이것이 $y = \sqrt{ax+b}+c$ 와 일치하므로
$a = 2,\ b = 4,\ c = 1$
$\therefore\ \ a+b+c = 7$

11. 무리함수 $f(x) = \sqrt{x} + \sqrt{8-x}$의 최댓값을 구하면?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$f(x) = \sqrt{x} + \sqrt{8-x}$에서
$x \geq 0,\ 8-x \geq 0$이므로
정의역은 $\{x \mid 0 \leq x \leq 8\}$, $f(x) \geq 0$이므로
$\{f(x)\}^2$이 최대일 때 $f(x)$도 최대이고
$\{f(x)\}^2 = x + 2\sqrt{8x-x^2} + 8 - x = 8 + 2\sqrt{8x-x^2}$
이때, $y = 8x - x^2 = -(x-4)^2 + 16$이므로
$0 \leq x \leq 8$에서 $x = 4$일 때 최댓값 16을 가진다.
따라서 $x = 4$일 때 $\{f(x)\}^2$은
최댓값 16을 가지므로
$f(x)$의 최댓값은 4이다.

12. $8 \leq x \leq a$ 에서 함수 $y = -\sqrt{x+1}+3$ 의 최댓값이 b , 최솟값이 -1 일 때, $a+b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 15

해설

$y = -\sqrt{x+1}+3$ 의 그래프는 $y = -\sqrt{x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 -1 만큼, y 축의 방향으로 3 만큼 평행이동한 것이므로 x 의 값이 증가할 때, y 의 값은 감소한다.

$x = a$ 일 때 최솟값을 가지므로

$-1 = -\sqrt{a+1}+3 \quad \therefore\ a = 15$

$x = 8$ 일 때 최댓값을 가지므로

$b = -\sqrt{8+1}+3 = 0$

$\therefore\ a+b = 15+0 = 15$

13. 무리함수 $y = \sqrt{2x+3}$ 의 그래프가 직선 $y = x + k$ 와 서로 다른 두 점에서 만나기 위한 실수 k 의 값의 범위를 구하면?

① $\frac{3}{2} < k < 2$ ② $\frac{3}{2} \le k < 2$ ③ $\frac{3}{2} \le k \le 2$
④ $\frac{3}{2} < k \le 2$ ⑤ $1 \le k < 2$

해설

(i) 두 그래프가 접할 때, $\sqrt{2x+3} = x + k$의 양변을 제곱하여 정리하면

$x^2 + 2(k-1)x + k^2 - 3 = 0$

이것이 중근을 가지므로

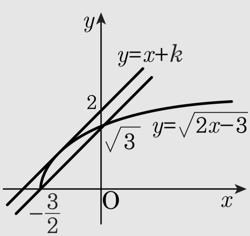
$\frac{D}{4} = (k-1)^2 - (k^2-3) = -2k + 4 = 0$

$\therefore\ k = 2$

(ii) 직선 $y = x + k$가 점 $\left(-\frac{3}{2},\ 0\right)$을 지날때

$0 = -\frac{3}{2} + k$

$\therefore\ k = \frac{3}{2}$



(i), (ii)와 위의 그림으로부터 두 그래프가 서로 다른 두 점에서 만날 k 값의 범위는

$\frac{3}{2} \le k < 2$

14. 무리함수 $y = \sqrt{kx}$ 의 그래프가 두 점 $(2,\ 2)$, $(3,\ 6)$ 을 잇는 선분과 만나도록 하는 정수 k 의 개수를 구하여라.

▶ 답 : ______ 개

▷ 정답 : 11 개

해설

함수 $y = \sqrt{kx}$ 의 그래프가 점 $(2,\ 2)$ 를 지날 때

$2 = \sqrt{2k}$, $\quad 2k = 4$

$\therefore k = 2$

또, 함수 $y = \sqrt{kx}$ 의 그래프가 점 $(3,\ 6)$ 을 지날 때

$6 = \sqrt{3k}$, $\quad 3k = 36$

$\therefore k = 12$

따라서 구하는 실수 k 의 값의 범위는

$2 \le k \le 12$ 이므로

정수 k 는 $2,\ 3,\ 4,\ \cdots,\ 12$ 의 11 개다.

15. $x > 2$에서 정의된 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 $f(x) = \sqrt{x-2}+2$, $g(x) = \dfrac{1}{x-2}+2$일 때 $(f \cdot g)(3) + (g \cdot f)(3)$의 값을 구하여라.

▶ **답 :**

▷ **정답 :** 6

해설

$(f \cdot g)(3) = f(g(3)) = f(3) = 3$
$(g \cdot f)(3) = g(f(3)) = g(3) = 3$
$\therefore (f \cdot g)(3) + (g \cdot f)(3) = 6$

16. 정의역이 $\{x \mid x > -1\}$ 인 두 함수 $f(x) = \dfrac{x-1}{x+1}$, $g(x) = \sqrt{3x+4} - 2$ 에 대하여 $\left(g \circ \left(f^{-1} \circ g\right)^{-1} \circ g\right)(4)$ 의 값을 구하면?

① -1 ② $-\dfrac{3}{4}$ ③ $\dfrac{1}{3}$ ④ $\dfrac{2}{3}$ ⑤ $\dfrac{5}{4}$

해설

$$\begin{aligned}
&\left(g \circ \left(f^{-1} \circ g\right)^{-1} \circ g\right)(4) \\
&= \left(g \circ \left(g^{-1} \circ f\right) \circ g\right)(4) \\
&= \left(\left(g \circ g^{-1}\right) \circ f \circ g\right)(4) \\
&= (f \circ g)(4)
\end{aligned}$$

이때, $g(4) = \sqrt{3 \cdot 4 + 4} - 2 = 2$ 이므로

구하는 값은 $f(g(4)) = f(2) = \dfrac{1}{3}$ 이다.

17. $y = \sqrt{x-1} + 2$ 의 역함수는?

① $y = x^2 + 4x + 3(x \geq 2)$ ② $y = x^2 - 4x + 5(x \geq 2)$

③ $y = x^2 + 4x + 3(x \geq 1)$ ④ $y = x^2 - 4x + 5(x \geq 1)$

⑤ $y = x^2 - 3x + 2(x \geq 3)$

해설

$y - 2 = \sqrt{x-1}$ 에서 $\sqrt{x-1} \geq 0$ 이므로 $y \geq 2$

또 양변을 제곱하면, $(y-2)^2 = x - 1$

$\therefore\ x = y^2 - 4y + 5\ (y \geq 2)$

x 와 y 를 바꾸면 $y = x^2 - 4x + 5\ (x \geq 2)$

18. 정의역이 $\{x \mid x > 1\}$인 두 함수 $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$, $g(x) = \sqrt{3(x-1)}$에 대하여 $(f \circ g)^{-1}\left(\dfrac{1}{4}\right)$의 값은?

① 2　　② 4　　③ 6　　④ 8　　⑤ 10

해설

$(f \circ g)^{-1}\left(\dfrac{1}{4}\right) = a$라 하면

$(f \circ g)(a) = \dfrac{1}{4}$이고

$$\begin{aligned} f(g(a)) &= f(\sqrt{3(a-1)}) \\ &= \frac{1}{\sqrt{3(a-1)}+1} \end{aligned}$$
이므로

$$\frac{1}{\sqrt{3(a-1)}+1} = \frac{1}{4}$$

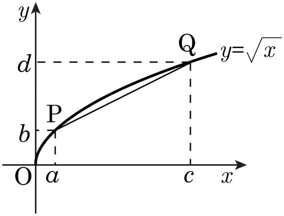
$\sqrt{3(a-1)}+1 = 4$,

$\sqrt{3(a-1)} = 3$

$3(a-1) = 9$, $a-1 = 3$, $a = 4$

$\therefore (f \circ g)^{-1}\left(\dfrac{1}{4}\right) = 4$

19. 함수 $y = \sqrt{x}$ 의 그래프 위의 두 점 $\mathrm{P}(a,\ b)$, $\mathrm{Q}(c,\ d)$ 에 대하여 $\dfrac{b+d}{2} = 1$ 일 때, 직선 PQ 의 기울기를 구하면? (단, $0 < a < c$)



① $\dfrac{1}{5}$　② $\dfrac{1}{4}$　③ $\dfrac{1}{3}$
④ $\dfrac{1}{2}$　⑤ 1

해설

두 점 $\mathrm{P}(a,\ b)$, $\mathrm{Q}(c,\ d)$ 는
함수 $y = \sqrt{x}$ 의 그래프 위의 점이므로
$b = \sqrt{a},\ d = \sqrt{c}$
$\therefore\ a = b^2,\ c = d^2$
따라서 직선 PQ 의 기울기는
$\dfrac{d-b}{c-a} = \dfrac{d-b}{d^2-b^2} = \dfrac{d-b}{(d-b)(d+b)} = \dfrac{1}{d+b}$ 이고
$\dfrac{b+d}{2} = 1$ 에서 $b + d = 2$ 이므로
$(\therefore$ 직선 PQ 의 기울기$) = \dfrac{1}{2}$

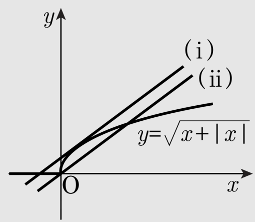
20. 함수 $y = \sqrt{x+|x|}$와 직선 $y = x+k$가 서로 다른 세 점에서 만나도록 하는 실수 k의 값의 범위를 구하면?

① $-1 < k < 0$　　② $-1 < k \le 0$　　③ $0 < k < \frac{1}{2}$

④ $0 \le k < \frac{1}{2}$　　⑤ $0 < k \le \frac{1}{2}$

해설

$x \ge 0$일 때 $y = \sqrt{2x}$이고 $x < 0$일 때
$y = 0$이므로
$y = \sqrt{x+|x|}$의 그래프는
그림과 같고 직선 $y = x+k$와 서로 다른
세 점에서 만나려면
(i)과 (ii)사이에 존재해야 한다.



① 곡선 $y = \sqrt{2x}$와 직선 $y = x + k$가 접할 때
$\sqrt{2x} = x + k$에서 $2x = (x + k)^2$
$x^2 + 2(k-1)x + k^2 = 0$
이 방정식의 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4} = (k-1)^2 - k^2 = 0,\quad -2k + 1 = 0$$

$$\therefore k = \frac{1}{2}$$

② 직선 $y = x + k$가 원점을 지날 때 $k = 0$

①, ②에서 구하는 k의 값의 범위는 $0 < k < \frac{1}{2}$