1. 이차함수 $y = x^2 - 8x + a$의 그래프와 x축과의 교점의 x좌표가 6, b 일 때, $a + b$의 값은?

① 11 ② 12 ③ 13 ④ 14 ⑤ 15

해설

이차함수 $y = x^2 - 8x + a$의 그래프와
x축과의 교점의 x좌표는
이차방정식 $x^2 - 8x + a = 0$의 실근이다.
$x^2 - 8x + a = 0$에 $x = 6$을 대입하면
$36 - 48 + a = 0$에서 $a = 12$
따라서 $x^2 - 8x + 12 = 0$에서 $(x - 2)(x - 6) = 0$
$x = 2$ 또는 $x = 6$
$\therefore\ b = 2 \therefore\ a + b = 14$

2. 이차함수 $y = x^2 + (k-3)x + k$ 의 그래프가 x 축과 만나지 않을 때, 실수 k 의 값의 범위는?

① $-1 < k < 7$　② $-1 < k < 8$　③ $0 < k < 9$

④ $1 < k < 9$　⑤ $1 < k < 10$

해설

주어진 이차함수의 그래프가
x 축과 만나지 않으려면
이차방정식 $x^2 + (k-3)x + k = 0$ 이
실근을 갖지 않아야 하므로
$D = (k-3)^2 - 4k < 0$
$k^2 - 10k + 9 < 0$, $(k-1)(k-9) < 0$
$\therefore\ 1 < k < 9$

3. 직선 $y=3x+2$ 와 포물선 $y=x^2+mx+3$ 이 두 점에서 만나기 위한 실수 m 의 범위를 구하면?

① $m<-1, m>3$ ② $m<1, m>5$ ③ $-1<m<3$

④ $-1<m<5$ ⑤ $1<m<5$

해설

$y=3x+2, y=x^2+mx+3$ 에서 y 를 소거하면

$x^2+(m-3)x+1=0, D=(m-3)^2-4>0$

$m^2-6m+5>0, (m-1)(m-5)>0$

$\therefore\ m<1,\ m>5$

4. 이차함수 $y = x^2 - 2ax - 2b^2 - 4a + 4b - 6$ 의 그래프가 x축에 접할 때, $a^2 + b^2$ 의 값은? (단, a, b는 실수)

① 2 ② 5 ③ 8 ④ 10 ⑤ 13

해설

$x^2 - 2ax - 2b^2 - 4a + 4b - 6 = 0$에서

$$\frac{D}{4} = a^2 - (-2b^2 - 4a + 4b - 6) = 0$$

$\therefore (a+2)^2 + 2(b-1)^2 = 0$

이 때, a, b가 실수이므로 $a + 2 = 0, b - 1 = 0$

따라서 $a = -2, b = 1$이므로

$a^2 + b^2 = 5$

5. 함수 $y=-x^2+kx$의 그래프가 직선 $y=-x+4$에 접할 때, 양수 k의 값은?

① 1　② $\frac{3}{2}$　③ 2　④ $\frac{5}{2}$　⑤ 3

해설

$y=-x^2+kx$가 $y=-x+4$에 접하려면

$4-x=-x^2+kx \quad \Rightarrow \quad x^2-(k+1)x+4=0$의 판별식은 $D=0$ 이어야 한다.

$D=(k+1)^2-16=0 \quad \Rightarrow \quad k+1=\pm 4$

$\therefore k=3 \ (\because k>0)$

6. 다음 방정식의 모든 해의 합을 구하여라.

$$x^4 - 13x^2 + 36 = 0$$

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

$x^4 - 13x^2 + 36 = 0$에서

$x^2 = t$로 놓으면

$t^2 - 13t + 36 = 0$, $(t-4)(t-9) = 0$

$\therefore\ t = 4$ 또는 $t = 9$

(i) $t = 4$일 때, $x^2 = 4$

$\therefore\ x = \pm 2$

(ii) $t = 9$일 때, $x^2 = 9$

$\therefore\ x = \pm 3$

따라서 모든 해의 합은

$(-2) + 2 + (-3) + 3 = 0$

7. 이차함수 $y = x^2 - 2(k-1)x + 9$의 그래프가 x축과 만나지 않기 위한 정수 k의 개수는?

① 4개 ② 5개 ③ 6개 ④ 7개 ⑤ 8개

해설

이차함수 $y = x^2 - 2(k-1)x + 9$의 그래프가 x축과 만나지 않으려면

이차방정식 $y = x^2 - 2(k-1)x + 9 = 0$의 판별식을 D라 할 때 $D < 0$ 이어야 한다.

$$\frac{D}{4} = (k-1)^2 - 9 < 0$$

$$k^2 - 2k - 8 < 0, \quad (k+2)(k-4) < 0$$

$$\therefore -2 < k < 4$$

따라서, k값 중 정수인 것은 -1, 0, 1, 2, 3의 5개이다.

8. 다음과 같은 포물선과 직선이 있다.

$$y = x^2 + (m-1)x + m^2 + 1$$
$$y = x + 1$$

포물선이 직선보다 항상 위쪽에 존재하도록 m의 범위를 정하여라.

① $m < -2,\quad m > \frac{2}{3}$
② $m < -1,\quad m > \frac{2}{3}$
③ $m < -2,\quad m > 2$
④ $m < 2,\quad m > \frac{2}{3}$
⑤ $m < -5,\quad m > \frac{2}{3}$

해설

$x^2+(m-1)x+m^2+1 > x+1$을 항상 만족시키도록 m을 정하면 된다.

$x^2+(m-2)x+m^2 > 0$에서 판별식

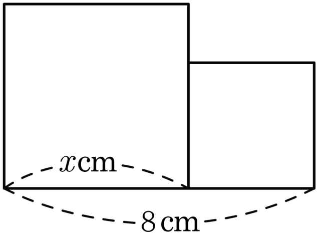
$D = (m-2)^2 - 4m^2 < 0,$

$(m-2+2m)(m-2-2m) < 0$

$(3m-2)(m+2) > 0$

$\therefore\quad m < -2\ ,\ m > \frac{2}{3}$

9. 다음 그림과 같이 길이가 8cm 인 선분을 둘로 나누어, 그 각각을 한 변으로 하는 정사각형을 만들었다. 두 정사각형의 넓이의 합을 $y\text{cm}^2$ 라 할 때, 두 정사각형의 넓이의 합이 최소가 되게 하는 $x(\text{cm})$ 의 값과 그 때의 넓이 $y(\text{cm}^2)$ 를 구하여라.



① $x = 2, y = 12$ ② $x = 2, y = 14$ ③ $x = 2, y = 16$

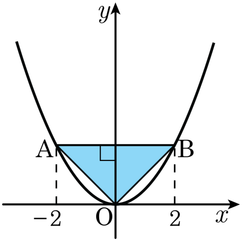
④ $x = 4, y = 32$ ⑤ $x = 4, y = 34$

해설

$$
\begin{aligned}
y &= x^2 + (8-x)^2 \\
&= 2(x^2 - 8x + 16 - 16) + 64 \\
&= 2(x-4)^2 + 32
\end{aligned}
$$

따라서 $x = 4$ 일 때 $y = 32$ 이다.

10. 다음 그림은 이차함수 $y=\frac{1}{2}x^2$ 의 그래프이다. 이때, $\triangle$AOB 의 넓이는 얼마인가?



① 2 ② 4 ③ 6

④ 8 ⑤ 10

해설

$\overline{\mathrm{AB}}=4$ 이고,

$x=2$ 를 대입하면 $y=2$ 이므로

$\triangle\mathrm{ABC}=\frac{1}{2}\times 2\times 4=4$

11. 둘레의 길이가 16cm 인 철사를 구부려서 부채꼴모양을 만들려고 한다. 부채꼴의 넓이가 최대가 되도록 하는 부채꼴의 반지름을 a , 이때 부채꼴의 넓이를 b 라 할 때, ab 의 값을 구하면?

① 16 ② 20 ③ 36 ④ 55 ⑤ 64

해설

부채꼴의 반지름을 a, 넓이를 b 라 하면

$$\begin{aligned} b &= \frac{1}{2} \times a \times (16 - 2a) = a(8 - a) \\ &= -a^2 + 8a \\ &= -(a^2 - 8a + 16 - 16) \\ &= -(a - 4)^2 + 16 \end{aligned}$$

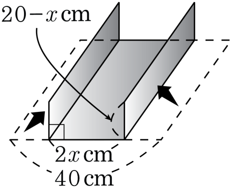
이 그래프가 위로 볼록이므로 꼭짓점이 최댓값을 나타낸다.
꼭짓점은 $(4, 16)$ 이므로 반지름 $a = 4$ 일 때, 부채꼴의 넓이 $b = 16$ 으로 최대가 된다.
따라서 $ab = 64$ 이다.

12. 너비가 40 cm 인 철판의 양쪽을 접어 단면이 직사각형인 물받이를 만들려고 한다. 단면의 넓이가 최대가 될 때, 높이를 구하면?

① 10 ② 8 ③ 6 ④ 4 ⑤ 2

해설

직사각형의 가로를 $2x$ 라 하면 세로는 $20-x$ 이다.
단면의 넓이는
$2x(20-x)=-2x^2+40x=-2(x^2-20x+200)+100=-2(x-10)^2+200$
$\therefore\ x=10$ 일 때 넓이가 최대이다.



13. 지면으로부터 20m 높이에서 초속 vm 로 쏘아 올린 공의 x 초 후의 높이를 ym 라 하면 x 와 y 사이에는 $y = 20 + \frac{v}{5}x - \frac{v}{10}x^2$ 의 관계가 있다. 공이 도달한 최고 높이가 25 m 일 때, 공의 속도를 구하여라.

▶ 답 : ______ m/s

▷ 정답 : 50 m/s

해설

$y = 20 + \frac{v}{5}x - \frac{v}{10}x^2 = -\frac{v}{10}(x-1)^2 + \frac{v}{10} + 20$

이 물체는 $x = 1$ 일 때, 최고 높이 $\frac{v}{10}+20$ 에 도달하고, $\frac{v}{10}+20 =$ 25 이므로 $v = 50$ 이다.

따라서 공의 속도는 초속 50m 이다.

14. 다음 방정식의 해가 아닌 것은?

$$(x^2+x)^2-8(x^2+x)+12=0$$

① -3 ② -2 ③ -1 ④ 1 ⑤ 2

해설

$(x^2+x)^2-8(x^2+x)+12=0$ 에서 $x^2+x=X$ 라 하면

$X^2-8X+12=0,\ (X-2)(X-6)=0$

$\therefore\ X=2$ 또는 $X=6$

(i) $X=2$ 일 때, $x^2+x=2$ 에서

$x^2+x-2=0,$

$(x-1)(x+2)=0$

$\therefore\ x=1$ 또는 $x=-2$

(ii) $X=6$ 일 때, $x^2+x=6$ 에서

$x^2+x-6=0,$

$(x+3)(x-2)=0$

$\therefore\ x=-3$ 또는 $x=2$

(i), (ii) 에서 주어진 방정식의 해는

$x=-3$ 또는 $x=-2$ 또는 $x=1$ 또는 $x=2$

따라서, 해가 아닌 것은 ③

15. 방정식 $(x^2+x)^2+2(x^2+x+1)-10=0$ 의 모든 실근의 합은?

① -10 ② -2 ③ -1 ④ 2 ⑤ 10

해설

$(x^2+x)^2+2(x^2+x+1)-10=0$ 에서

$x^2+x=A$ 라 하면

$A^2+2A-8=0,$

$(A+4)(A-2)=0$

$\therefore\ A=-4$ 또는 $A=2$

(i) $x^2+x=-4$ 일 때,

$x^2+x+4=0$

$\therefore\ x=\dfrac{-1\pm\sqrt{15}i}{2}$

(ii) $x^2+x=2$ 일 때,

$x^2+x-2=0,$

$(x+2)(x-1)=0$

$\therefore\ x=-2$ 또는 $x=1$

(i), (ii) 에서 실근은 $x=-2$ 또는 $x=1$ 이므로 실근의 합은

$-2+1=-1$

16. 다음 방정식의 모든 해의 곱을 구하여라.

$$(x^2-2x)(x^2-2x-2)-3=0$$

▶ 답 :

▷ 정답 : -3

해설

$(x^2-2x)(x^2-2x-2)-3=0$ 에서

$x^2-2x=t$ 로 놓으면

$t(t-2)-3=0$,

$t^2-2t-3=0$

$(t-3)(t+1)=0$

$\therefore\ t=3$ 또는 $t=-1$

(i) $t=3$, 즉 $x^2-2x=3$ 일 때

$x^2-2x-3=0$

$(x-3)(x+1)=0$

$\therefore\ x=-1$ 또는 $x=3$

(ii) $t=-1$, 즉 $x^2-2x=-1$ 일 때

$x^2-2x+1=0$

$(x-1)^2=0$

$\therefore\ x=1$ (중근)

따라서, $-1\times3\times1=-3$

17. x에 관한 삼차방정식 $2x^3+ax^2-bx+3=0$의 한 근이 1이고, $a+b+1=0$일 때, 나머지 근을 모두 구하면?

① -3　　② $-1,\ 2$　　③ $-1,\ 3$

④ $-1,\ \dfrac{3}{2}$　　⑤ $-\dfrac{1}{2},\ 3$

해설

한 근이 1이므로 주어진 식에 $x=1$을 대입하면

$2+a-b+3=0,\ a-b=-5$

주어진 조건인 $a+b+1=0$과 연립하여 풀면

$a=-3,\ \ b=2$

$\therefore 2x^3-3x^2-2x+3=0$

$(x-1)(2x^2-x-3)=0$

$(x-1)(2x-3)(x+1)=0$

$\therefore x=1,\ \dfrac{3}{2},\ -1$

18. 삼차방정식 $(x+2)(x^2+2x-a+2)=0$의 실근이 -2뿐일 때, 실수 a 값의 범위를 구하면?

① $a<-3$　② $a<1$　③ $a>-1$

④ $a>2$　⑤ $a>3$

해설

실근이 -2뿐이므로 $x^2+2x-a+2=0$은 허근을 갖는다.

$D=2^2-4\times1\times(-a+2)$

$=4a-4<0$

$\therefore a<1$

19. 이차함수 $y = -3x^2 + 6x + 4a$ 의 최댓값은 음수이고, 그 그래프가 점 $(-a,\ 2a-7)$ 을 지날 때, 상수 a 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $-\frac{7}{3}$

해설

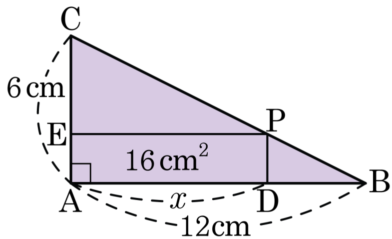
$$y = -3x^2 + 6x + 4a$$
$$= -3(x-1)^2 + 3 + 4a$$

$y = -3(x-1)^2 + 3 + 4a$ 의 그래프가 점 $(-a, 2a-7)$ 을 지나므로 $2a - 7 = -3(-a-1)^2 + 3 + 4a$ 을 정리하면 $3a^2 + 4a - 7 = 0$, $(3a+7)(a-1) = 0$

$\therefore a = -\frac{7}{3}$ or 1

그런데 최댓값 $3 + 4a$ 의 값이 음수이므로 $a = -\frac{7}{3}$ 이다.

20. 다음 그림과 같이 $\overline{AB} = 12\text{cm}$, $\overline{AC} = 6\text{cm}$ 인 직각삼각형 ABC 의 빗변 위에 점 P 를 잡아 직사각형 EADP 를 만들었을 때, 이 직사각형의 넓이가 16cm^2 이었다. 이 때, $\overline{AD}$ 의 길이를 구하면? (단, $\overline{AD} > 6\text{cm}$)



① 7cm ② 8cm ③ 9cm ④ 10cm ⑤ 11cm

해설

$\triangle\text{CEP} \backsim \triangle\text{CAB}$ (AA닮음) 이므로

$\overline{CE} : \overline{EP} = \overline{CA} : \overline{AB}$

즉, $\overline{CE} : x = 6 : 12$

$\therefore \overline{CE} = \frac{1}{2}x$

따라서 $\overline{EA} = 6 - \frac{1}{2}x$ 이므로 $x\left(6 - \frac{1}{2}x\right) = 16$

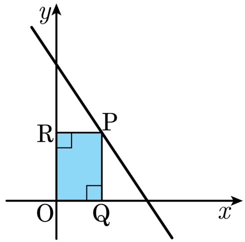
$-\frac{1}{2}x^2 + 6x = 16$

$x^2 - 12x + 32 = (x-4)(x-8) = 0$

$\therefore \ x = 4$ 또는 $x = 8$

그런데 $6 < x < 12$ 이므로 $x = 8(\text{cm})$

21. 직선 $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}=1$ 위를 움직이는 한 점 P 가 있다. 점 P 에서 x 축, y 축 위에 내린 수선의 발을 각각 Q, R 라고 할 때, 직사각형 OQPR 의 넓이의 최댓값을 구하여라. (단, 점 P 는 제 1 사분면 위에 있다.)



▶ 답 :

▷ 정답 : $\frac{3}{2}$

해설

직선의 방정식은 $y=-\frac{3}{2}x+3$ 이므로

점 P 의 좌표를 $(a,\ b)$ 로 놓으면 $b=-\frac{3}{2}a+3$

$$\square\mathrm{OQPR}=ab=a\left(-\frac{3}{2}a+3\right)$$
$$=-\frac{3}{2}a^2+3a$$
$$=-\frac{3}{2}(a-1)^2+\frac{3}{2}$$

한편, 점 P 는 제 1 사분면 위의 점이므로

$a>0,\ b=-\frac{3}{2}a+3>0 \qquad \therefore\ 0<a<2$

따라서 $\square$OQPR 의 넓이는 $a=1$ 일 때, 최댓값 $\frac{3}{2}$ 을 갖는다.

22. 1200 명이 들어갈 수 있는 어느 소극장에서 입장권을 6000 원에 팔면 평균 600 명의 관중이 입장한다. 시장조사에 의하면, 입장료를 500 원씩 내리면 100 명씩 더 온다고 조사가 되었다. 이 때, 수입을 최대로 하기 위한 입장권의 가격은?

① 3000 원 ② 3500 원 ③ 4000 원
④ 4500 원 ⑤ 5000 원

해설

수입을 $f(x)$ 라고 하면,

$$\begin{aligned} f(x) &= (6000 - 500x)(600 + 100x) \\ &= -50000x^2 + 300000x + 3600000 \\ &= -50000(x-3)^2 + 4050000 \end{aligned}$$

$x = 3$ 일 때 최대이다.
즉, (입장권 가격)$= 6000 - 500 \times 3 = 4500$ 원.

23. 사차방정식 $x^4-6x^3+11x^2-6x+1=0$의 한 근을 α라 할 때, $\alpha+\frac{1}{\alpha}$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

먼저 주어진 방정식을 x^2 으로 나누면

방정식은 $x^2-6x+11-\frac{6}{x}+\frac{1}{x^2}=0$

$\rightarrow \left(x+\frac{1}{x}\right)^2-6\left(x+\frac{1}{x}\right)+9=0$이 된다.

이 식에 α를 넣어도 성립하므로

$\alpha+\frac{1}{\alpha}$를 t로 치환하면

$\alpha+\frac{1}{\alpha}$는 3이 된다.

따라서$\alpha+\frac{1}{\alpha}=3$

24. 사차방정식 $x^4+8x^3+17x^2+8x+1=0$의 해는?

① $x=\dfrac{-3\pm\sqrt{5}}{2}$ 또는 $x=\dfrac{-5\pm\sqrt{21}}{2}$

② $x=\dfrac{3\pm\sqrt{5}}{2}$ 또는 $x=\dfrac{5\pm\sqrt{21}}{2}$

③ $x=\dfrac{-15\pm\sqrt{221}}{2}$ 또는 $x=\dfrac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$

④ $x=\dfrac{15\pm\sqrt{221}}{2}$ 또는 $x=\dfrac{1\pm\sqrt{3}i}{2}$

⑤ $x=15\pm\sqrt{221}$ 또는 $x=1\pm\sqrt{3}i$

해설

$x^4+8x^3+17x^2+8x+1=0$의 양변을

x^2으로 나누면

$$x^2+8x+17+\frac{8}{x}+\frac{1}{x^2}=0$$

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2+8\left(x+\frac{1}{x}\right)+17=0$$

$\therefore x+\dfrac{1}{x}=A$라 하자.

$$A^2+8A+15=(A+3)(A+5)$$

$$=\left(x+\frac{1}{x}+3\right)\left(x+\frac{1}{x}+5\right)=0$$

$$(x^2+3x+1)(x^2+5x+1)=0$$

$$\therefore x=\frac{-3\pm\sqrt{5}}{2},\ \frac{-5\pm\sqrt{21}}{2}$$

25. 방정식 $x^4+Ax^3-7x^2-Ax+3B=0$의 두 근이 -1과 -2일 때, 다른 두 근을 α,β라 하자. 이 때, $A+B-\alpha\beta$의 값을 구하면?

① -1　　② -2　　③ -3　　④ 1　　⑤ 2

해설

$f(x)=x^4+Ax^3-7x^2-Ax+3B$라 하면 $-1,-2$가 근이므로

$f(-1)=1-A-7+A+3B=0$

$\therefore\ B=2$

$f(-2)=16-8A-28+2A+3B=0$, $-6A+3B-12=0$ $\quad\therefore\ A=-1$

$\therefore\ A+B=-1+2=1\cdots\cdots$ ㉠

$\therefore\ (x+1)(x+2)(x^2-4x+3)=0$

따라서, 다른 두 근은 $x^2-4x+3=0$의 근이다.

$\therefore\ \alpha\beta=3\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서 $A+B-\alpha\beta=1-3=-2$