

1. 직선 $y = 3x + 2$ 와 포물선 $y = x^2 + mx + 3$ 이 두 점에서 만나기 위한 실수 m 의 범위를 구하면?

① $m < -1, m > 3$

② $m < 1, m > 5$

③ $-1 < m < 3$

④ $-1 < m < 5$

⑤ $1 < m < 5$

해설

$y = 3x + 2, y = x^2 + mx + 3$ 에서 y 를 소거하면

$$x^2 + (m - 3)x + 1 = 0, D = (m - 3)^2 - 4 > 0$$

$$m^2 - 6m + 5 > 0, (m - 1)(m - 5) > 0$$

$$\therefore m < 1, m > 5$$

2. 포물선 $y = x^2 + 2ax + b$ 가 x 축과는 접하고 직선 $y = 4x$ 와는 서로 만나지 않을 때, 상수 a 의 값의 범위는?

① $a > -1$

② $a < -1$

③ $a > 0$

④ $a < 1$

⑤ $a > 1$

해설

포물선 $y = x^2 + 2ax + b$ 가 x 축과는 접하므로
이차방정식 $y = x^2 + 2ax + b = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = a^2 - b = 0 \quad \therefore b = a^2 \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

또, 포물선 $y = x^2 + 2ax + b$ 가 직선 $y = 4x$ 와 서로 만나지 않으려면

$$\text{이차방정식 } x^2 + 2ax + b = 4x,$$

즉 $x^2 + 2(a-2)x + b = 0$ 의 판별식을 D' 이라 할 때

$$\frac{D'}{4} = (a-2)^2 - b < 0 \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

⑦을 ⑧에 대입하면 $(a-2)^2 - a^2 < 0$, $-4a + 4 < 0$

$$\therefore a > 1$$

3. 포물선 $y = x^2 - 2kx + 2k + 3$ 과 x 축과의 두 교점 사이의 거리가 $2\sqrt{5}$ 일 때, 모든 k 의 값의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

포물선 $y = x^2 - 2kx + 2k + 3$ 과 x 축과의 교점의 x 좌표는 이차방정식 $x^2 - 2kx + 2k + 3 = 0$ 의 두 근이므로 두 근을 α, β 라 하면 이차방정식의 두 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + \beta = 2k, \alpha\beta = 2k + 3$$

$$|\alpha - \beta| = 2\sqrt{5} \text{ 에서 } |\alpha - \beta|^2 = (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta \text{ 이므로}$$

$$20 = (2k)^2 - 4(2k + 3), 4k^2 - 8k - 12 = 20$$

$$k^2 - 2k - 8 = 0$$

따라서, 근과 계수의 관계에 의하여 모든 k 의 값의 합은 2이다.

4. 두 이차함수 $y = x^2 - ax + b$ 와 $y = x^2 - bx + a$ 의 그래프의 교점이 x 축 위에 있도록 상수 a, b 의 값을 정할 때, $a + b$ 의 값은? (단, $a \neq b$)

① -2

② -1

③ 0

④ 1

⑤ 2

해설

교점의 x 좌표를 p 라 하면

$$p^2 - ap + b = p^2 - bp + a$$

$$(a - b)p + a - b = 0$$

$$(a - b)(p + 1) = 0$$

$$a \neq b \text{ 이므로 } p = -1$$

그런데 교점이 x 축 위에 있으므로

교점의 y 좌표는 0 이다.

$$\therefore 1 + a + b = 0$$

$$\therefore a + b = -1$$

5. 이차함수 $y = x^2 - 2ax - 2b^2 - 4a + 4b - 6$ 의 그래프가 x 축에 접할 때, $a^2 + b^2$ 의 값은? (단, a, b 는 실수)

① 2

② 5

③ 8

④ 10

⑤ 13

해설

$$x^2 - 2ax - 2b^2 - 4a + 4b - 6 = 0 \text{에서}$$

$$\frac{D}{4} = a^2 - (-2b^2 - 4a + 4b - 6) = 0$$

$$\therefore (a + 2)^2 + 2(b - 1)^2 = 0$$

이 때, a, b 가 실수이므로 $a + 2 = 0, b - 1 = 0$

따라서 $a = -2, b = 1$ 이므로

$$a^2 + b^2 = 5$$

6. 이차함수 $y = 2x^2 + ax + 12$ 의 그래프와 직선 $y = 5x + b$ 가 두 점 P, Q에서 만난다. 선분 PQ의 중점의 좌표가 (3, 17)일 때, $a + b$ 의 값은?

① -5

② -4

③ -3

④ -2

⑤ -1

해설

두 점 P, Q의 x 좌표를 각각 α, β 라고 하면

α, β 는 이차방정식 $2x^2 + ax + 12 = 5x + b$ 의 두 실근이다.

$2x^2 + (a - 5)x + 12 - b = 0$ 에서 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + \beta = -\frac{a-5}{2} \dots\dots \textcircled{㉠}$$

또, 선분 PQ의 중점의 x 좌표가 3이므로

$$\frac{\alpha + \beta}{2} = 3 \text{에서 } \alpha + \beta = 6 \dots\dots \textcircled{㉡}$$

$$\textcircled{㉠}, \textcircled{㉡} \text{에서 } -\frac{a-5}{2} = 6$$

$$\therefore a = -7$$

또, 점 (3, 17)은 직선 $y = 5x + b$ 위의 점이므로 $17 = 5 \cdot 3 + b \quad \therefore$

$$b = 2$$

$$\therefore a + b = -7 + 2 = -5$$

7. 이차함수 $y = f(x)$ 의 그래프가 다음 그림과 같을 때, 방정식 $f(x^2 - 1) = 0$ 의 서로 다른 실근의 개수는?

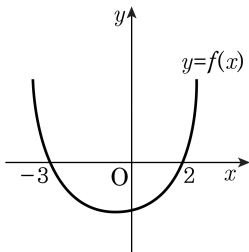
① 1 개

② 2 개

③ 3 개

④ 4 개

⑤ 5 개



해설

주어진 그래프에서 $f(-3) = 0$, $f(2) = 0$ 이므로

방정식 $f(x^2 - 1) = 0$ 의 근은

(i) $x^2 - 1 = -3$ 일 때, $x^2 = -2 \quad \therefore x = \pm \sqrt{2}i$

(ii) $x^2 - 1 = 2$ 일 때, $x^2 = 3 \quad \therefore x = \pm \sqrt{3}$

(i), (ii) 에서 주어진 방정식의 서로 다른 실근의 개수는 2 개 이다.

8. $y = 0$, $y = (k - 2)x^2 - 6(k - 1)x + 9k + 1$ 을 동시에 만족하는 (x, y) 가 2개일 때, 정수 k 의 최댓값은?

① 8

② 9

③ 10

④ 11

⑤ 12

해설

$y = (k - 2)x^2 - 6(k - 1)x + 9k + 1$ 의 그래프는 x 축과 서로 다른 두 점에서 만난다.

이 때, 방정식 $(k - 2)x^2 - 6(k - 1)x + 9k + 1 = 0$ 은 이차방정식이어야 하므로 $k - 2 \neq 0$

$$\therefore k \neq 2 \dots\dots \textcircled{\text{㉠}}$$

또, 이차방정식의 판별식을 D 라하면 $D > 0$ 이어야 하므로

$$\frac{D}{4} = \{3(k - 1)\}^2 - (k - 2)(9k + 1) > 0$$

$$9(k^2 - 2k + 1) - (9k^2 - 17k - 2) > 0$$

$$-k + 11 > 0$$

$$\therefore k < 11 \dots\dots \textcircled{\text{㉡}}$$

㉠, ㉡에서 $k < 11$, $k \neq 2$

따라서, 정수 k 의 최댓값은 10이다.

9. 이차함수 $y = x^2 - 4px + 5 - p$ 의 그래프가 다음 조건을 만족시키도록 p 의 값 또는 p 의 값의 범위를 정하여라.

- (1) x 축과 두 점에서 만날 때
- (2) x 축과 접할 때
- (3) x 축과 만나지 않을 때

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : $p < -\frac{5}{4}$ 또는 $p > 1$

▷ 정답 : $p = -\frac{5}{4}$ 또는 $p = 1$

▷ 정답 : $-\frac{5}{4} < p < 1$

해설

$y = x^2 - 4px + 5 - p$ 에서

$$\frac{D}{4} = 4p^2 - (5 - p) = 4p^2 + p - 5 = (4p + 5)(p - 1)$$

(1) $\frac{D}{4} = (4p + 5)(p - 1) > 0$ 이므로

$$p > 1 \text{ 또는 } p < -\frac{5}{4}$$

(2) $\frac{D}{4} = (4p + 5)(p - 1) = 0$ 이므로

$$p = 1 \text{ 또는 } p = -\frac{5}{4}$$

(3) $\frac{D}{4} = (4p + 5)(p - 1) < 0$ 이므로

$$-\frac{5}{4} < p < 1$$

10. 직선 $y = 2x + a$ 와 이차함수 $y = x^2 - 1$ 의 그래프가 한 점에서 만날 때, 상수 a 의 값은?

① -2

② -1

③ 0

④ 1

⑤ 2

해설

직선 $y = 2x + a$ 와 이차함수 $y = x^2 - 1$ 의 그래프가 한 점에서 만나므로

이차방정식 $2x + a = x^2 - 1$, 즉 $x^2 - 2x - a - 1 = 0$ 의 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4} = 1 + a + 1 = 0$$

$$\therefore a = -2$$

11. 이차함수 $y = kx^2 + 4\sqrt{2}x + k + 2$ 의 그래프가 x 축과 서로 다른 두 점에서 만나기 위한 정수 k 의 값들의 합은?

① -3

② -5

③ 7

④ 3

⑤ 5

해설

이차방정식 $kx^2 + 4\sqrt{2}x + k + 2 = 0$ 이

서로 다른 두 실근을 가지므로

이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = (2\sqrt{2})^2 - k(k+2) > 0$$

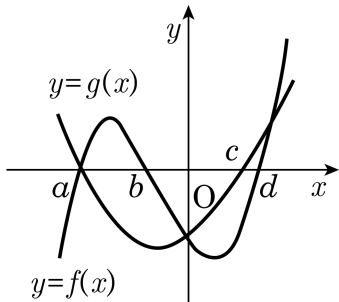
$$8 - k^2 - 2k > 0, (k+4)(k-2) < 0$$

$$\therefore -4 < k < 2$$

따라서 정수 k 는 -3, -2, -1, 0, 1이다.

$$\therefore (-3) + (-2) + (-1) + 0 + 1 = -5$$

12. 두 개의 방정식 $f(x) = 0$, $g(x) = 0$ 을 좌표평면에 나타내었더니 다음 그림과 같았다. 이 때, 다음 중 $\{f(x)\}^2 + \{g(x)\}^2 = 0$ 를 만족하는 것을 고르면?



① a

② a, b

③ a, c

④ a, b, d

⑤ a, b, c, d

해설

$f(x) = 0$, $g(x) = 0$ 를 모두 만족하는 것은 a 이다.
 $(\because$ 실수 a, b 에 대하여 $a^2 + b^2 = 0$ 이면
 $a = 0$ 이고 $b = 0$ 이다.)

13. 직선 $y = mx - 2$ 와 포물선 $y = 2x^2 - 3x$ 가 있다.

- (1) 직선이 포물선에 접하도록 m 의 값을 정하여라.
- (2) 직선이 포물선과 두 점에서 만나도록 m 의 값의 범위를 정하여라.
- (3) 직선이 포물선과 만나지 않도록 m 의 값의 범위를 정하여라

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : 1, -7

▷ 정답 : $m > 1$, $m < -7$

▷ 정답 : $-7 < m < 1$

해설

직선과 포물선의 교점의 x 좌표를 구하는 식은

$$mx - 2 = 2x^2 - 3x$$

곧, $2x^2 - (m+3)x + 2 = 0$ 이고,

$$D = (m+3)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 2 = m^2 + 6m - 7$$

$$= (m-1)(m+7)$$

$$(1) D = (m-1)(m+7) = 0$$

$$\therefore m = 1, -7$$

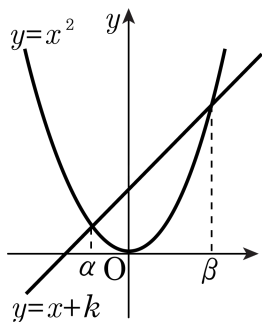
$$(2) D = (m-1)(m+7) > 0$$

$$\therefore m > 1, m < -7$$

$$(3) D = (m-1)(m+7) < 0$$

$$\therefore -7 < m < 1$$

14. 이차함수 $y = x^2$ 과 일차함수 $y = x + k$ 의 그래프가 다음 그림과 같이 서로 다른 두 점에서 만날 때, 다음 보기에서 옳은 것을 모두 고른 것은?



보기

㉠ $\alpha + \beta = 1$

㉡ $k > 0$

㉢ $\alpha\beta = -k$

① ㉠

② ㉠, ㉡

③ ㉠, ㉢

④ ㉡, ㉢

⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

두 함수 $y = x^2$ 과 $y = x + k$ 의 그래프가 만나는 두 점의 x 좌표가 α, β 이므로 이차방정식 $x^2 = x + k$, 즉 $x^2 - x - k = 0$ 은 서로 다른 두 실근 α, β 를 갖는다.

㉠ 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + \beta = 1 \cdots (\text{참})$$

㉡ 이차방정식 $x^2 - x - k = 0$ 의 판별식을 D 라 하면 $D = 1 + 4k > 0$

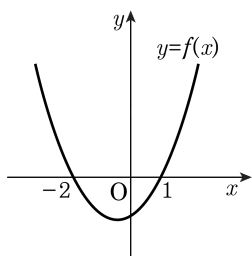
$$\text{에서 } k > -\frac{1}{4} \cdots (\text{거짓})$$

㉢ 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha\beta = -k \cdots (\text{참})$$

따라서, 옳은 것은 ㉠, ㉢이다.

15. 이차함수 $y = f(x)$ 의 그래프가 다음 그림과 같을 때, 이차함수 $f(x+a) = 0$ 의 두 실근의 합이 5 가 되도록 하는 상수 a 의 값은?



- ① -3 ② -2 ③ -1
④ 0 ⑤ 1

해설

$y = f(x+a)$ 의 그래프는 $y = f(x)$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 $-a$ 만큼 평행이동한 것이다.

$y = f(x)$ 이 그래프가

x 축과 만나는 점의 좌표가 $-2, 1$ 이므로

$y = f(x+a)$ 의 그래프가

x 축과 만나는 점의 좌표는 $-2-a, 1-a$

따라서, 방정식 $f(x+a) = 0$ 의 두 실근이

$-2-a, 1-a$ 이고

그 합이 5 이므로 $-2-a+1-a=5$

$\therefore a = -3$