1. $24 \times a = 90 \times b = c^2$ 을 만족하는 가장 작은 자연수 c 의 값을 구하여라. (단, a, b, c 는 모두 자연수이다.)

▶ 답 :

▷ 정답 : 60

해설

$24 \times a = 90 \times b = c^2$

$24 \times a$ 와 $90 \times b$ 가 어떤 수의 제곱수가 되어야 하므로 소인수분해를 해 보면

$2^3 \times 3 \times a = 2 \times 3^2 \times 5 \times b$

즉, c 는 24 과 90 의 공배수이므로 $2^3 \times 3^2 \times 5$ 의 배수이다.

그러므로 가장 작은 c^2 은 $2^4 \times 3^2 \times 5^2$ 이어야 한다.

$\therefore c = 2^2 \times 3 \times 5 = 60$

2. $3^2 \times 5 \times 7$ 에 자연수 a 를 곱하면 어떤 자연수의 제곱인 수가 된다. a 의 최솟값은?

① 5 ② 7 ③ 15 ④ 21 ⑤ 35

해설

$3^2 \times 5 \times 7 \times a$ 가 어떤 자연수의 제곱인 수가 되려면 $3^2 \times 5 \times 7 \times a$ 를 소인수분해했을 때 각 소인수의 지수가 짝수여야 한다. 따라서 만족하는 자연수 a 의 최솟값은 $5 \times 7 = 35$ 이다.

3. 75 에 가능한 한 작은 자연수 x로 나누어서 어떤 자연수 y 의 제곱이 되게 하려고 한다. y의 값은?

① 1 ② 3 ③ 5 ④ 9 ⑤ 15

해설

75 를 소인수분해하면 다음과 같다.

$$\begin{array}{r|l} 3 & 75 \\ \hline 5 & 25 \\ \hline & 5 \end{array}$$

$75 = 3 \times 5^2$ 이므로 $\dfrac{3 \times 5^2}{x} = y^2$ 을 만족하는 x 의 값 중 가장 작은 자연수는 3 이다. 따라서 $y = 5$ 이다.

4. 60 에 어떤 자연수를 곱하여 자연수의 제곱이 되게 하려고 할 때, 곱할 수 있는 수 중에서 가장 작은 자연수는?

① 3 ② 5 ③ 12 ④ 15 ⑤ 20

해설

$60 = 2^2 \times 3 \times 5$

곱해야 할 가장 작은 자연수는 $3 \times 5 = 15$

5. $60 \times 2^3 \times x$ 가 어떤 자연수의 제곱이 될 때, 가장 작은 자연수 x 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 30

해설

$60 \times 2^3 \times x = 2^5 \times 3 \times 5 \times x$ 이므로
가장 작은 x 는 $2 \times 3 \times 5 = 30$

6. 18 에 적당한 자연수를 곱하여 어떤 자연수의 제곱이 되게 하려고 한다. 이때 곱해야 할 자연수를 가장 작은 것부터 3 개를 써라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

▷ 정답 : 8

▷ 정답 : 18

해설

$18 = 2 \times 3^2$

곱해야 할 자연수를 x 라 할 때,

$(2 \times 3^2) \times x = y^2$

$x = 2,\ 2 \times 2^2,\ 2 \times 3^2,\ \cdots$

$= 2,\ 8,\ 18,\ \cdots$

7. 120 에 자연수 x 를 곱하여 어떤 자연수의 제곱이 되게 하려고 한다. 다음 중 x 의 값이 될 수 없는 것은?

① $2\times3\times5$ ② $2^3\times3\times5$ ③ $2\times3^3\times5$

④ $2\times3\times5\times7^2$ ⑤ $2^2\times3\times5$

해설

$120=2^3\times3\times5$ 로 소인수분해되므로 소인수 2, 3, 5의 지수가 홀수인 수를 곱한다.

$2^2\times3\times5$ 은 2^2 을 곱하였으므로 제곱수가 될 수 없다.

8. 자연수 a, b 에 대하여 $2^2 \times 5 \times a = b^2$ 을 만족하는 b 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 10

해설

$2^2 \times 5 \times a = b^2$ 을 만족하려면 $2^2 \times 5 \times a$ 를 소인수분해했을 때 각 소인수의 지수가 짝수여야 한다. 따라서 만족하는 자연수 b 의 최솟값은 $a = 5$ 일 때 $2 \times 5 = 10$ 이다.

9. 12 에 가능한 한 작은 자연수 a 를 곱하여 어떤 자연수 b 의 제곱이 되도록 할 때, a, b 의 값을 각각 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : $a = 3$

▷ 정답 : $b = 6$

해설

$12 \times a = b^2$ 에서

$12 = 2^2 \times 3$

$a = 3$

$2^2 \times 3 \times 3 = b^2$

$2^2 \times 3^2 = b^2$

$b = 2 \times 3 = 6$

10. $240 \times a = b^2$ 을 만족하는 가장 작은 자연수 a, b 에 대하여 $b - a$ 의 값은?

① 45 ② 60 ③ 75 ④ 90 ⑤ 105

해설

$240 = 2^4 \times 3 \times 5$ 이므로 $a = 3 \times 5$

$2^4 \times 3 \times 5 \times (3 \times 5) = 2^4 \times 3^2 \times 5^2$, $b = 2^2 \times 3 \times 5 = 60$

$a = 15,\ b = 60$

$\therefore b - a = 45$

11. $\frac{140}{x} = y^2$ 을 만족할 때, $x + y$ 의 최솟값을 구하여라. (단, x, y는 자연수이다.)

▶ 답 :

▷ 정답 : 37

해설

$\frac{140}{x} = y^2$ 에서

$140 = 2^2 \times 5 \times 7$

$x = 5 \times 7$

$2^2 = y^2$

$2 = y$

$\therefore x + y = 35 + 2 = 37$

12. $2^3 \times 3^2 \times 5$ 에 어떤 자연수를 곱하여 자연수의 제곱이 되게 하려고 할 때, 곱할 수 있는 수 중에서 가장 작은 자연수는?

① 3 ② 5 ③ 3×5 ④ 5^2 ⑤ 10

해설

$2^3 \times 3^2 \times 5$

곱해야할 가장 작은 자연수는

$2 \times 5 = 10$

13. 720 을 자연수로 나누어 어떤 자연수의 제곱이 되도록 할 때, 나눌 수 있는 가장 작은 자연수를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

$720 = 2^4 \times 3^2 \times 5$ 이므로
나눌 수 있는 가장 작은 자연수는 5 이다.

14. 28 에 가능한 한 작은 자연수 a 를 곱하여 어떤 자연수 b 의 제곱이 되도록 할 때, a 의 값은?

① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 7

해설

$28 \times a = b^2$ 에서

$28 = 2^2 \times 7$

$a = 7$

$2^2 \times 7 \times 7 = b^2$

$2^2 \times 7^2 = b^2$

$b = 2 \times 7 = 14$

15. 600 을 자연수 x 로 나누어 어떤 자연수의 제곱이 되게 하려고 한다. 나누어야 할 가장 작은 자연수를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

600 을 소인수분해하면 다음과 같다.

$$\begin{array}{r|l} 2 & 600 \\ 2 & 300 \\ 2 & 150 \\ 3 & 75 \\ 5 & 25 \\ & 5 \end{array}$$

$600 = 2^3 \times 3 \times 5^2$ 이므로 $\dfrac{2^3 \times 3 \times 5^2}{x}$ 가 어떤 자연수의 제곱이 되기 위한 x 의 값 중에서 가장 작은 자연수는 $2 \times 3 = 6$ 이다.

16. 48 에 어떤 수 x 를 곱하여 자연수의 제곱이 되도록 하려 한다. 이러한 x 중 두 번째로 작은 수를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 12

해설

$48 = 2^4 \times 3$ 이므로
가장 작은 $x = 3$
두 번째로 작은 수는 $2^2 \times 3 = 12$

17. 48 에 자연수 x 를 곱하여 어떤 자연수의 제곱이 되게 하려고 한다. 다음에서 x 가 될 수 있는 수를 모두 고르면 (정답 2 개)?

① 2 ② 3 ③ 4 ④ 9 ⑤ 12

해설

$48 = 2^4 \times 3$

곱해야 할 자연수가 x 이고, 어떤 자연수를 y 라 하면 $(2^4 \times 3) \times x = y^2$ 이다.

$x = 3 \times 1^2, 3 \times 2^2, \cdots$

$= 3, 12, \cdots$

18. $\frac{72}{n}$ 가 어떤 자연수의 제곱이 되게 하는 자연수 n 은 모두 몇 개인가?

① 1 개 ② 2 개 ③ 3 개 ④ 4 개 ⑤ 5 개

해설

$72 = 2^3 \times 3^2$,

$\frac{72}{n}$ 가 어떤 자연수의 제곱이 되기 위해서

$n = 2$, 2×3^2 , 2^3 , $2^3 \times 3^2$ 의 4 개이다.

19. $48 \times x = y^2$ 을 만족하는 가장 작은 자연수 x, y 에 대하여 $\frac{x}{y}$ 의 값은?

① 3 ② 4 ③ $\frac{2}{3}$ ④ $\frac{1}{3}$ ⑤ $\frac{1}{4}$

해설

$2^4 \times 3 \times x = y^2$

가장 작은 $x = 3$,

$2^4 \times 3 \times 3 = 2^4 \times 3^2 = y^2$

$y = 2^2 \times 3 = 12$

$\frac{x}{y} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$

20. 432를 자연수 x 로 나누어 어떤 자연수의 제곱이 되게 하려고 한다. 다음 중 x 의 값으로 알맞지 <u>않은</u> 것은?

① 3 ② 6 ③ 12 ④ 27 ⑤ 48

해설

$\frac{432}{x} = \square^2$

$432 = 2^4 \times 3^3$

나눠야 할 가장 작은 자연수는 3이다. 그러므로 3 또는 3× (지수가 짝수인 수)의 꼴이 아닌 것을 찾는다.

① 3

② 2×3

③ $2^2 \times 3$

④ 3^3

⑤ $2^4 \times 3$