

1. x 에 관계없이 $\frac{x-a}{2x-b}$ 가 항상 일정한 값을 가질 때, 상수 a, b 에 대하여 $\frac{b}{a}$ 의 값은?

① 1

② 2

③ 3

④ 4

⑤ 5

해설

$$\frac{x-a}{2x-b} = k \text{라 놓으면,}$$

$$(2k-1)x + (a-bk) = 0$$

$$\therefore 2k-1=0, a=bk \text{이므로}$$

$$k = \frac{1}{2}, a = \frac{1}{2}b \text{이다.}$$

$$\therefore \frac{b}{a} = 2$$

2. 차수가 같은 두 다항식의 합이 $2x^2 - 5x - 3$ 이고 최소공배수가 $x^3 - 2x^2 - 5x + 6$ 일 때, 두 다항식의 최대공약수를 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: $x - 3$

해설

두 다항식을 A, B 라고 하면

$$A + B = (a + b)G, \quad L = abG,$$

즉, 최대공약수는 두 식의 합과 최소공배수의 공약수이다.

$$x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = (x - 3)(x - 1)(x + 2)$$

$$2x^2 - 5x - 3 = (x - 3)(2x + 1)$$

$$\therefore G = x - 3$$

3. $f(x) = \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{30}$ 일 때, $f\left(\frac{1+i}{1-i}\right) + f\left(\frac{1-i}{1+i}\right)$ 의 값을 구하면?

① 1

② -1

③ -2

④ 2

⑤ 0

해설

$$\frac{1+i}{1-i} = \frac{2i}{2} = i, \quad \frac{1-i}{1+i} = \frac{-2i}{2} = -i$$

$$f(i) = \left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{30} = (-i)^{30} = (i^4)^7 i^2$$

$$= -1f(-i) = \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{30} = i^{30}$$

$$= (i^4)^7 i^2 = -1$$

$$\therefore f\left(\frac{1+i}{1-i}\right) + f\left(\frac{1-i}{1+i}\right)$$

$$= f(i) + f(-i) = -1 - 1 = -2$$

4. 함수 $f(x) = (x^2 - 2x + 2)(x^2 - 2x + 3) + 3x^2 - 6x$ 의 최솟값은?

① -2

② -1

③ 0

④ 1

⑤ 2

해설

$x^2 - 2x + 2 = t$ 로 놓으면

$t = (x - 1)^2 + 1 \geq 1$ 이고

$$f(x) = g(t) = t(t + 1) + 3t - 6$$

$$= t^2 + 4t - 6$$

$$= (t + 2)^2 - 10 \quad (t \geq 1)$$

따라서 구하는 최솟값은

$$g(1) = (1 + 2)^2 - 10 = -1$$

5. x 가 실수일 때 $\frac{x^2 - x + 4}{x^2 + x + 1}$ 의 값이 취할 수 있는 정수의 개수는?

① 2 개

② 3 개

③ 4 개

④ 5 개

⑤ 6 개

해설

$$\frac{x^2 - x + 4}{x^2 + x + 1} = k \text{라 두면}$$

$$x^2 - x + 4 = k(x^2 + x + 1)$$

$$(k - 1)x^2 + (k + 1)x + k - 4 = 0$$

x 가 실수이므로 실근이다.

따라서, 판별식 $D = (k + 1)^2 - 4(k - 1)(k - 4) \geq 0$

$$3k^2 - 22k + 15 \leq 0$$

$$\therefore \frac{11 - 2\sqrt{19}}{3} \leq k \leq \frac{11 + 2\sqrt{19}}{3}$$

k 는 정수이므로 대강의 범위를 구해보면

$$0. \times \times \leq k \leq 6. \times \times \text{에서}$$

$k = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ 의 6개이다.

6. 1 개에 2,000 원 하는 햄버거와 1 개에 3,000 원 하는 샌드위치를 합쳐서 25 개를 사려고 한다. 전체 가격이 60,000 원 이상 68,000 원 이하가 되게 하려고 한다. 다음 중 살 수 있는 햄버거의 개수가 아닌 것은?

- ① 9 개 ② 12 개 ③ 13 개 ④ 14 개 ⑤ 17 개

해설

햄버거의 수를 x 개라고 하면 샌드위치의 수는 $(25 - x)$ 개이다. 따라서 햄버거를 x 개 사고 샌드위치를 $25 - x$ 개 샀을 때의 전체 가격은 $2000x + 3000(25 - x)$ 이다. 전체 가격이 60,000 원 이상 68,000 원 이하가 되므로 식으로 나타내면, $60000 \leq 2000x + 3000(25 - x) \leq 68000$ 이다. 이를 연립부등식으로 나타내면,

$$\begin{cases} 2000x + 3000(25 - x) \geq 60000 \\ 2000x + 3000(25 - x) \leq 68000 \end{cases} \quad \text{이므로 간단히 하면,}$$

$$\begin{cases} x \leq 15 \\ x \geq 7 \end{cases} \quad \text{이다.}$$

따라서 $7 \leq x \leq 15$ 이다.

따라서 살 수 있는 햄버거의 개수는 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15 개이다.

7. 이차부등식 $ax^2 + bx + c > 0$ 을 만족하는 x 의 범위가 $-1 < x < 2$ 일 때, 부등식 $bx^2 - ax - c < 0$ 을 만족하는 x 의 범위는?

① $-2 < x < 1$

② $-1 < x < 2$

③ $0 < x < 3$

④ $1 < x < 4$

⑤ $2 < x < 5$

해설

해의 범위가 사이값으로 표현되므로 $a < 0$ 이다

$$ax^2 + bx + c > 0$$

$$\Leftrightarrow a(x+1)(x-2) > 0$$

$$\Leftrightarrow ax^2 - ax - 2a > 0 \text{ 이므로}$$

$$b = -a \quad c = -2a \quad (b > 0, c > 0)$$

$$\therefore bx^2 - ax - c < 0 \text{ 에서}$$

$$-ax^2 - ax + 2a < 0$$

$$x^2 + x - 2 < 0 (\because -a > 0)$$

$$(x-1)(x+2) < 0$$

$$\therefore -2 < x < 1$$

8. $0 < x < 1$ 인 모든 x 에 대하여 항상 $x^2 - 3 \leq (a - 1)x$ 가 성립할 때, 실수의 상수 a 의 범위를 구하면?

① $a = -1$

② $a > -1$

③ $a \geq -1$

④ $a < -1$

⑤ $a \leq -1$

해설

$f(x) = x^2 - (a - 1)x - 3$ 이라 두어,
 $0 < x < 1$ 에서 $f(x) \leq 0$ 되도록 하자.

$f(0) \leq 0$ 그리고 $f(1) \leq 0$ 이면 된다.

그런데, $f(0) = -3$ 이므로

$f(1) = 1 - (a - 1) - 3 \leq 0$ 에서 $a \geq -1$

9. $1 < x < 3$ 에서 x 에 대한 이차방정식 $x^2 - ax + 4 = 0$ 이 서로 다른 두 실근을 갖도록 하는 실수 a 의 값의 범위가 $\alpha < a < \beta$ 일 때, $3\alpha\beta$ 의 값을 구하여라.

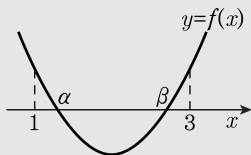
▶ 답 :

▷ 정답 : 52

해설

$f(x) = x^2 - ax + 4$ 라 하면

$1 < x < 3$ 에서 $y = f(x)$ 의 그래프는 다음 그림과 같아야 한다.



(i) $x^2 - ax + 4 = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$D = a^2 - 16 > 0 \text{ 에서 } (a+4)(a-4) > 0$$

$$\therefore a < -4 \text{ 또는 } a > 4$$

(ii) $f(1) = 5 - a > 0$ 에서 $a < 5$

$$f(3) = 13 - 3a > 0 \text{ 에서 } a < \frac{13}{3}$$

$$\therefore a < \frac{13}{3}$$

(iii) $y = f(x)$ 의 그래프의 대칭축이

$$x = \frac{a}{2} \text{ 이므로 } 1 < \frac{a}{2} < 3$$

$$\therefore 2 < a < 6$$

(i), (ii), (iii) 에서 a 의 값의 범위는 $4 < a < \frac{13}{3}$

따라서, $\alpha = 4$, $\beta = \frac{13}{3}$ 이므로 $3\alpha\beta = 52$

10. 세 점 $A(0,0)$, $B(2,4)$, $C(6,6)$ 에 대해 $\triangle ABC$ 의 외심의 좌표는?

① $(6,0)$

② $(6,-1)$

③ $(7,-1)$

④ $(7,0)$

⑤ $(8,0)$

해설

외심의 성질 : 삼각형의 세 점에서의 거리가 같다.

외심을 (x,y) 라 하면

$$\sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(x-2)^2 + (y-4)^2} \dots \textcircled{1}$$

$$\sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(x-6)^2 + (y-6)^2} \dots \textcircled{2}$$

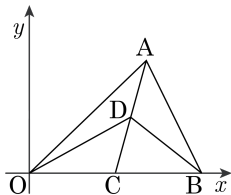
①, ②의 양변을 제곱하여 정리하면

$$x + 2y = 5, \quad x + y = 6$$

두 식을 연립하여 풀면 $(x,y) = (7,-1)$

외심이 세 변의 수직이등분선의 교점이라는 것을 이용하여 구할 수도 있다.

11. 좌표평면 위에 세 점 $O(0, 0)$, $A(2, 2)$, $B(3, 0)$ 이 있다. 선분 OB 위의 점 C 와 선분 AC 위의 점 D 에 대하여 4개의 삼각형 OAD , OCD , ABD , BCD 의 넓이가 모두 같을 때, 점 D 의 x 좌표와 y 좌표의 합을 소수점 아래 둘째 자리까지 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : 2.75

해설

$\triangle OCD$ 와 $\triangle BCD$ 의 넓이가 같으므로

$$\overline{OC} : \overline{BC} = 1 : 1$$

즉, 점 C 는 선분 OB 의 중점이고,

$$C\left(\frac{3}{2}, 0\right)$$

또, $\triangle OAD$ 와 $\triangle OCD$ 의 넓이가 같으므로

$$\overline{CD} : \overline{AD} = 1 : 1$$

즉, 점 D 는 선분 AC 의 중점이므로,

$$D\left(\frac{7}{4}, 1\right)$$

따라서, 점 D 의 x 좌표와 y 좌표의 합은

$$\frac{7}{4} + 1 = \frac{11}{4} = 2.75$$

12. 길이가 36인 선분 AB를 3 : 1로 내분하는 점을 C라 하고 선분 BC를 4 : 1로 외분하는 점을 D라 할 때, 선분 AD의 길이를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 24

해설

수직선 위에서

A(0), B(36) 이라 하고, C(x) 라 하면

$$x = \frac{3 \cdot 36 + 0 \cdot 1}{3 + 1} = 27$$

B(36), C(27) 이므로 D(y) 라 하면

$$y = \frac{4 \cdot 27 - 1 \cdot 36}{4 - 1} = 24$$

$$\therefore \overline{AD} = 24$$

13. 점 Q가 직선 $2x + y - 4 = 0$ 위를 움직일 때, 점 A(-2, 3)과 Q를 잇는 선분 AQ의 중점 P의 자취의 방정식은?

① $4x + 2y - 3 = 0$

② $2x + 3y + 1 = 0$

③ $4x - 3y + 1 = 0$

④ $x - 4y - 3 = 0$

⑤ $-x + y + 2 = 0$

해설

점 A(-2, 3), Q(x, y)의 중점의 좌표를 P(X, Y)라 하면,

$$P(X, Y) = P\left(\frac{x-2}{2}, \frac{y+3}{2}\right) \text{ 이므로}$$

$$X = \frac{x-2}{2}, Y = \frac{y+3}{2}$$

$$\therefore x = 2X + 2, y = 2Y - 3$$

이것을 $2x + y - 4 = 0$ 에 대입하면

$$2(2X + 2) + (2Y - 3) - 4 = 0$$

$$4X + 2Y - 3 = 0$$

$$\therefore 4x + 2y - 3 = 0$$

14. 점 A(7, 7) 과 원 $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 4$ 위의 점을 이은 선분의 중점의 자취의 방정식은?

① $x^2 + y^2 = 4$

② $(x-4)^2 + (y-4)^2 = 1$

③ $(x+4)^2 + (y-4)^2 = 1$

④ $(x+4)^2 + (y+4)^2 = 1$

⑤ $(x-4)^2 + (y+4)^2 = 1$

해설

$(x-1)^2 + (y-1)^2 = 4$ 위의 점을 $P(a, b)$ 라 하면
 $A(7, 7), P(a, b)$ 의 중점의 좌표 $M(x, y)$ 는

$M\left(\frac{a+7}{2}, \frac{b+7}{2}\right)$ 이다.

$$\therefore x = \frac{a+7}{2}, \quad y = \frac{b+7}{2}$$

$$\therefore a = 2x - 7, \quad b = 2y - 7$$

이 때, 점 P 는 원 $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 4$

위의 점이므로 $(a-1)^2 + (b-1)^2 = 4$ 가 성립한다.

$$(2x-8)^2 + (2y-8)^2 = 4$$

$$\therefore (x-4)^2 + (y-4)^2 = 1$$

15. 점 A $(-4, 1)$ 에서 원 $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0$ 에 그은 접선의 접점을 B라 할 때, $\overline{AB}$ 의 길이는?

① 3

② 5

③ 7

④ 8

⑤ 10

해설

$x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0$ 에서

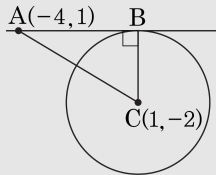
$$(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 9$$

한편, 다음 그림에서

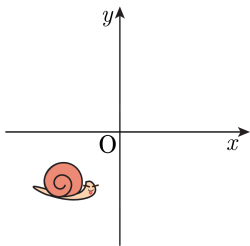
$$\overline{AC} = \sqrt{(-4 - 1)^2 + (1 + 2)^2} = \sqrt{34}$$

또한, 반지름의 길이가 3 이므로 접선의
길이 $\overline{AB}$ 는

$$\overline{AB} = \sqrt{\overline{AC}^2 - \overline{BC}^2} = \sqrt{(\sqrt{34})^2 - 3^2} = 5$$



16. 직교좌표계를 사용했을 때, 달팽이의 현재 위치는 $(-10, -10)$ 이다. 이 달팽이는 x 축 방향으로 2, y 축 방향으로 2 만큼 평행이동하는데 1 분이 걸린다고 한다. 이 달팽이가 원점에 도달하는데 걸린 시간은 몇 분인지 구하여라.



답 :

분



정답 : 5분

해설

달팽이가 x 축 방향으로 2, y 축 방향으로 2 만큼 평행이동하는데 1 분이 걸린다.

즉, $(-10, -10)$ 에서 $(-8, -8)$ 까지 가는데 1 분,
 $(-6, -6)$ 까지 가는데 2 분, 같은 식으로 하면
원점에 도달하는데 총 5 분이 걸린다.

17. 두 점 $A(-6, 1)$, $B(2, 5)$ 가 직선 $y = ax + b$ 에 대하여 대칭일 때, $a + b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $a + b = -3$

해설

두 점 A 와 B 가 $y = ax + b$ 에 대하여 대칭이므로
 $\overline{AB}$ 의 중점 $(-2, 3)$ 은 직선
 $y = ax + b$ 위에 있다.

$$\therefore 3 = -2a + b \cdots \textcircled{1}$$

또한, 직선 AB 와 직선 $y = ax + b$ 가
서로 수직이므로

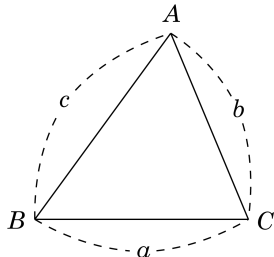
$(\overline{AB} \text{의 기울기}) \times a = -1$ 에서

$$\frac{5-1}{2-(-6)} \times a = -1$$

$\therefore a = -2$ $a = -2$ 를 $\textcircled{1}$ 에 대입하면

$$b = -1 \therefore a + b = -3$$

18. 다음 그림과 같이 세 변의 길이가 a, b, c 인 $\triangle ABC$ 에서 $a^3 + b^3 + c^3 - ab(a+b) + bc(b+c) - ca(c+a) = 0$ 이 성립할 때, $\triangle ABC$ 는 어떤 삼각형인가?



- ① $a = b$ 인 이등변삼각형 ② $a = c$ 인 이등변삼각형
 ③ $\angle A = 90^\circ$ 인 직각삼각형 ④ $\angle B = 90^\circ$ 인 직각삼각형
 ⑤ $\angle C = 90^\circ$ 인 직각삼각형

해설

$$\begin{aligned}
 & a^3 + b^3 + c^3 - ab(a+b) + bc(b+c) - ca(c+a) \\
 &= a^3 + b^3 + c^3 - a^2b - ab^2 + b^2c + bc^2 - c^2a - ca^2 \\
 &= a^3 - (b+c)a^2 - (b^2+c^2)a + b^3 + b^2c + bc^2 + c^3 \\
 &= a^3 - (b+c)a^2 - (b^2+c^2)a + b^2(b+c) + c^2(b+c) \\
 &= a^3 - (b+c)a^2 - (b^2+c^2)a + (b+c)(b^2+c^2) \\
 &= a^3 - (b+c)a^2 - (b^2+c^2)(a-b-c) \\
 &= (a-b-c)a^2 - (b^2+c^2)(a-b-c) \\
 &= (a-b-c)(a^2 - b^2 - c^2) \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

이 때, a, b, c 는 삼각형의 세 변의 길이이므로 $a \neq b+c$

$$\therefore a^2 - b^2 - c^2 = 0,$$

$$\text{즉 } a^2 = b^2 + c^2$$

따라서, $\triangle ABC$ 는 a 를 빗변으로 하는 직각삼각형,

즉 $\angle A = 90^\circ$ 인 직각삼각형이다.

19. 사차방정식 $x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 1 = 0$ 을 만족하는 모든 근의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

$x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 1 = 0$ 의 양변을 x^2 으로 나누면

$$x^2 + x + 2 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = 0$$

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 + \left(x + \frac{1}{x}\right) = 0$$

$x + \frac{1}{x} = t$ 로 치환하면

$$t^2 + t = 0, t(t+1) = 0$$

$$\therefore t = 0 \text{ 또는 } t = -1$$

$$(i) \ x + \frac{1}{x} = 0 \text{ 일 때, } x^2 + 1 = 0$$

$$\therefore x = \pm i$$

$$(ii) \ x + \frac{1}{x} = -1 \text{ 일 때,}$$

$$x^2 + 1 = -x, x^2 + x + 1 = 0$$

$$\therefore x = \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}$$

(i), (ii)에서 주어진 방정식의 근은

$$x = \pm i \text{ 또는 } x = \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}$$

$$\therefore (-i) + i + \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2} + \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2} = -1$$

20. 부등식 $x^2 + ax + a + 3 \leq 0$ 를 만족하는 x 가 오직 1개이기 위한 양수 a 가 존재하는 구간은?

① $1 < a < 3$

② $2 < a < 5$

③ $3 < a < 6$

④ $4 < a < 7$

⑤ $6 < a < 7$

해설

$x^2 + ax + a + 3 \leq 0$ 의 해가

1개 존재하기 위해서는

$x^2 + ax + a + 3 = 0$ 이 중근을 가져야 한다.

$$\therefore D = a^2 - 4(a + 3)$$

$$= a^2 - 4a - 12$$

$$= (a - 6)(a + 2) = 0$$

$$\therefore a = 6 \quad (\because a > 0)$$