

1. 1 부터 50 까지의 자연수를 모두 곱하면 $A \times (2 \times 5)^n$ 이 될 때, n 의 값을 구하면?

① 10

② 11

③ 12

④ 13

⑤ 14

해설

$1 \times 2 \times 3 \times 4 \times \cdots \times 49 \times 50$ 에서

2 의 배수의 개수 : 25 개

2^2 의 배수의 개수 : 12 개

2^3 의 배수의 개수 : 6 개

2^4 의 배수의 개수 : 3 개

2^5 의 배수의 개수 : 1 개

5의 배수의 개수 : 10 개

5^2 의 배수의 개수 : 2 개이므로

$$\begin{aligned}\therefore 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times \cdots \times 50 &= 2^{47} \times 5^{12} \times \cdots \\ &= A \times (2 \times 5)^{12}\end{aligned}$$

$$\therefore n = 12$$

2. 다음 중 옳지 않은 것을 모두 고르면?

- ① 13 은 소수이다.
- ② 52 는 합성수이다.
- ③ 가장 작은 소수는 1 이다.
- ④ 짝수인 소수는 존재하지 않는다.
- ⑤ 5 보다 작은 소수는 2 개이다.

해설

- ③ 1 은 소수도 합성수도 아니다.
- ④ 2 는 짝수이면서 소수이다.
- ⑤ 5 보다 작은 소수는 2,3 으로 2 개이다.

3. 다음 설명 중 옳은 것은?

- ① 소수는 약수의 개수가 2 개이다.
- ② 소수는 모두 홀수이다.
- ③ 가장 작은 소수는 1 이다.
- ④ 모든 자연수는 약수의 개수가 2 개 이상이다.
- ⑤ 자연수에는 소수와 합성수가 있다.

해설

- ② 2 는 유일한 짝수인 소수이다.
- ③ 가장 작은 소수는 2 이다. 1 은 소수가 아니다.
- ④ 1 은 약수의 개수가 1 개이다.
- ⑤ 자연수에는 소수와 합성수 그리고 1 이 있다.

4. 588 을 588 보다 작은 자연수 a 로 나누었더니 약수의 개수가 홀수인 자연수 b 가 되었다. 가능한 b 의 값의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 249

해설

약수의 개수가 홀수인 수는 제곱수이므로

$$\frac{588}{a} = \frac{2^2 \times 3 \times 7^2}{a} = k^2 = b \text{ 라 하면,}$$

a 는 3, $2^2 \times 3$, 3×7^2 이 가능하다.

$$a = 3 \text{ 일 때, } b = 14^2 = 196$$

$$a = 2^2 \times 3 \text{ 일 때, } b = 7^2 = 49$$

$$a = 3 \times 7^2 \text{ 일 때, } b = 2^2 = 4$$

588 보다 작다고 했으므로 $a = 2^2 \times 3 \times 7^2$ 일 때는 제외한다.

$$\therefore 196 + 49 + 4 = 249$$

5. 다음 중 어떤 수를 5로 나누었을 때의 나머지가 될 수 없는 것은?

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$$0 \leq (\text{나머지}) < 5$$

6. 6의 약수의 개수는?

- ① 1개 ② 2개 ③ 3개 ④ 4개 ⑤ 6개

해설

6의 약수는 1, 2, 3, 6이다.
따라서 4개다.

7. 100 이하의 13 의 배수는 모두 몇 개인지 구하여라.

▶ 답 : 7 개

▷ 정답 : 7 개

해설

13, 26, 39, 52, 65, 78, 91 의 7 개이다.

8. 다음 중 옳지 않은 것을 모두 고르면?(정답 2 개)

① $2 \times 2 \times 4 \times 4 \times 7 = 2^2 \times 4^2 \times 7$

② $\frac{1}{3 \times 3 \times 3 \times 3} = \frac{4}{3^3}$

③ $\frac{1}{2 \times 2 \times 5 \times 5} = \frac{1}{2^2 \times 5^2}$

④ $\frac{1}{3^2 \times 3^4} = \frac{1}{3^8}$

⑤ $a \times a \times a \times b \times b = a^3 \times b^2$

해설

② $\frac{1}{3 \times 3 \times 3 \times 3} = \frac{1}{3^4}$, ④ $\frac{1}{3^2 \times 3^4} = \frac{1}{3^6}$

9. 108 을 소인수분해하면?

① $2^2 \times 3^2$

② $2^2 \times 3^3$

③ $2^3 \times 3$

④ $2^3 \times 3^2$

⑤ $2^3 \times 3^3$

해설

$$2 \overline{) 108}$$

$$2 \overline{) 54}$$

$$3 \overline{) 27}$$

$$3 \overline{) 9}$$

$$3$$

$$108 = 2^2 \times 3^3$$

10. $600 = a^x \times b^y \times c^z$ 로 소인수분해될 때, $(a + b + c) \times (x + y + z)$ 의 값은? (단, $a < b < c$)

① 12

② 24

③ 36

④ 48

⑤ 60

해설

$600 = 2^3 \times 3 \times 5^2 = a^x \times b^y \times c^z$ 이므로

$a = 2, b = 3, c = 5, x = 3, y = 1, z = 2$

$\therefore (a + b + c) \times (x + y + z) = (2 + 3 + 5) \times (3 + 1 + 2) = 10 \times 6 = 60$

11. $2^3 \times 3^2 \times 5$ 에 어떤 자연수를 곱하여 자연수의 제곱이 되게 하려고 할 때, 곱할 수 있는 수 중에서 가장 작은 자연수는?

① 3 ② 5 ③ 3×5 ④ 5^2 ⑤ 10

해설

$$2^3 \times 3^2 \times 5$$

곱해야할 가장 작은 자연수는

$$2 \times 5 = 10$$

12. 28 에 가능한 한 작은 자연수 a 를 곱하여 어떤 자연수 b 의 제곱이 되도록 할 때, a 의 값은?

① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 7

해설

$$28 \times a = b^2 \text{ 에서}$$

$$28 = 2^2 \times 7$$

$$a = 7$$

$$2^2 \times 7 \times 7 = b^2$$

$$2^2 \times 7^2 = b^2$$

$$b = 2 \times 7 = 14$$

13. 810의 약수의 개수와 $3 \times 5^x \times 7$ 의 약수의 개수가 같을 때, 자연수 x 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

$810 = 2 \times 3^4 \times 5$ 의 약수의 개수가 $3 \times 5^x \times 7$ 의 약수의 개수와 같으므로

$$(1+1)(4+1)(1+1) = (1+1)(x+1)(1+1) = 20$$

$$\therefore x = 4$$

14. 자연수 288 의 약수의 개수와 자연수 $4 \times 3 \times 7^a$ 의 약수의 개수가 같을 때, a 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$288 = 2^5 \times 3^2$ 이므로

약수의 개수는 $(5+1) \times (2+1) = 18$ (개)

$4 \times 3 \times 7^a = 2^2 \times 3 \times 7^a$ 이므로

약수의 개수는

$(2+1) \times (1+1) \times (a+1) = 6 \times (a+1)$ (개)

$6 \times (a+1) = 18$ 이므로

$a+1 = 3$

$\therefore a = 2$

15. $3^3 \times a$ 는 약수의 개수가 12 인 수 중 가장 작은 홀수라고 할 때, a 에 맞는 수를 구하면?

① 1 ② 4 ③ 9 ④ 25 ⑤ 36

해설

$$12 = 4 \times 3 = (3 + 1) \times (2 + 1)$$

$3^3 \times a$ 가 홀수이므로

a 는 3 보다 큰 소수의 제곱수이므로 $5^2 = 25$

16. 1 부터 200 까지의 자연수 중에서 약수의 개수가 3 개인 자연수는 모두 몇 개인가?

① 5 개 ② 6 개 ③ 7 개 ④ 8 개 ⑤ 9 개

해설

자연수 n 의 약수의 개수가 3 개이기 위해서는
1 과 n 이외에 약수가 한 개만 더 있어야하므로
자연수 n 은 소수의 완전제곱수이어야 한다.
따라서 1 부터 200 까지의 완전제곱수를 구하면
 $13^2 = 169 < 200$ 이고 $17^2 = 289 > 200$ 이므로
200 이하인 소수의 완전제곱수는
 $2^2, 3^2, 5^2, 7^2, 11^2, 13^2$ 이다.

17. 네 자리의 정수 $41\square2$ 가 3 의 배수인 동시에 4 의 배수가 되도록 $\square$ 안에 알맞은 수는?

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

3의 배수는 자리 수의 합이 3의 배수 이므로 $41\square2 \Rightarrow 4 + 1 + \square + 2 = 7 + \square$ 에서 $\square$ 안에 들어갈 수 있는 수는 2, 5, 8 이다.
4의 배수는 마지막 두 자리가 4의 배수이어야 하므로 $41\square2 \Rightarrow \square2$ 에서
 $\square$ 안에 들어갈 수 있는 수는 1, 3, 5, 7, 9 이다.
따라서 동시에 만족하는 수는 5 이다.

18. 자연수 x 를 소인수분해하여 곱해진 모든 수들의 합을 $S(x)$ 라 한다.
(단, 1 은 생각하지 않는다.)
예를 들면, $2250 = 2 \times 3^2 \times 5^3$ 이므로 $S(2250) = 2 + 3 + 3 + 5 + 5 + 5 = 23$
이 때, 어떤 자연수 m 을 소인수분해하면 세 종류의 소인수가 나타나고
 $S(m) = 17$ 이라고 한다. 이러한 수 중에서 가장 큰 수와 작은 수의
차를 구하시오.

▶ 답 :

▷ 정답 : 108

해설

17 을 세 종류의 소수의 합으로 나타내면,
 $17 = 2 + 2 + 2 + 3 + 3 + 5 = S(360)$
 $17 = 2 + 2 + 3 + 5 + 5 = S(300)$
 $17 = 2 + 2 + 3 + 3 + 7 = S(252)$
 $\therefore 360 - 252 = 108$

19. $2^a \times 3^b \times 11^c$ 이 132 를 약수로 가질 때, 세 자연수 a, b, c 의 최솟값의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

132 를 소인수분해하면 $132 = 2^2 \times 3 \times 11$ 이다. 한편 $2^a \times 3^b \times 11^c$ 이 132 를 약수로 가지므로 a 는 2 보다 크거나 같고, b 는 1 보다 크거나 같다. 또한 c 도 1 보다 크거나 같다.
따라서 a, b, c 의 최솟값은 각각 2, 1, 1 이므로 구하는 합은 $2 + 1 + 1 = 4$ 이다.

20. 자연수 a 의 약수의 개수를 $n(a)$ 로 나타낼 때, $n(240) \div n(162) \times n(x) = 20$ 을 만족시키는 자연수 x 중에서 가장 작은 수를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 48

해설

$240 = 2^4 \times 3 \times 5$, $162 = 2 \times 3^4$ 에서
 $n(240) = (4 + 1) \times (1 + 1) \times (1 + 1) = 20$
 $n(162) = (1 + 1) \times (4 + 1) = 10$
 $n(240) \div n(162) \times n(x) = 20$
 $20 \div 10 \times n(x) = 20$
 $\therefore n(x) = 10$
 $10 = 5 \times 2 = (4 + 1)(1 + 1)$ 이므로
가장 작은 $x = 2^4 \times 3 = 48$
 $\therefore 48$