

1. 실수 전체의 집합 R 에서 R 로의 세 함수 f, g, h 에 대하여 $(h \circ g)(x) = 3x + 4$, $f(x) = x^2$ 일 때, $(h \circ (g \circ f))(2)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 16

해설

$$\begin{aligned}(h \circ (g \circ f))(2) &= ((h \circ g) \circ f)(2) \\ &= (h \circ g)(f(2)) \\ &= (h \circ g)(4) \\ &= 3 \times 4 + 4 = 16\end{aligned}$$

2. 함수 $y = x^2 - 2x$ ($x \geq 1$) 의 역함수를 구하면?

① $y = x^2 + 2x$ ($x \geq 1$)

② $y = x^2 - 2x$ ($x \leq 1$)

③ $y = \sqrt{x+1}$ ($x \geq -1$)

④ $y = \sqrt{x+1} + 1$ ($x \geq -1$)

⑤ $y = \sqrt{-x+1} + 1$ ($x \leq 1$)

해설

$$y = x^2 - 2x \text{에서 } x^2 - 2x + 1 = y + 1$$

$$(x-1)^2 = y+1, x-1 = \sqrt{y+1} \quad (\because x \geq 1)$$

$$\therefore x = \sqrt{y+1} + 1$$

$$x \text{와 } y \text{를 바꾸어 쓰면 } y = \sqrt{x+1} + 1$$

이 때, 원래의 함수

$$y = x^2 - 2x = (x-1)^2 - 1 \quad (x \geq 1) \text{의 치역}$$

$\{y | y \geq -1\}$ 이

역함수 $y = \sqrt{x+1} + 1$ 의 정의역이 되므로

구하는 역함수는 $y = \sqrt{x+1} + 1$ ($x \geq -1$)

3. 두 함수 f, g 가 일대일대응일 때, 다음 중 $g \circ (f \circ g)^{-1}$ 와 같은 것을 고르면?

① f

② f^{-1}

③ g

④ g^{-1}

⑤ $g \circ f^{-1}$

해설

$$\begin{aligned}(f \circ g)^{-1} &= g^{-1} \circ f^{-1} \text{ 이므로} \\ g \circ (f \circ g)^{-1} &= g \circ (g^{-1} \circ f^{-1}) \\ &= (g \circ g^{-1}) \circ f^{-1} \\ &= f^{-1}\end{aligned}$$

4. 일차함수 $f(x)$ 가 $f(1) = -1$, $f^{-1}(3) = 2$ 일 때, $2f^{-1}(1)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$f(x) = ax + b$ ($a \neq 0$) 로 놓으면,
 $f(1) = -1$, $f(2) = 3$ 이므로
 $f(1) = a + b = -1$, $f(2) = 2a + b = 3$
 $\therefore a = 4$, $b = -5$
 $\therefore f(x) = 4x - 5$
 $f^{-1}(1) = a$ 로 놓으면 $f(a) = 1$
 $4a - 5 = 1 \quad \therefore a = \frac{3}{2}$
따라서 $f^{-1}(1) = \frac{3}{2}$, $2f^{-1}(1) = 3$

5. 함수 $f(x) = kx + 1$ 에 대하여 $f^{-1} = f$ 가 성립할 때, 상수 k 의 값은?
(단, f^{-1} 는 f 의 역함수)

① 4

② 3

③ 2

④ -1

⑤ -2

해설

f^{-1} 이므로 $f \circ f = I$

$(f \circ f)(x) = x$ 에서

$f(f(x)) = f(kx + 1) = k(kx + 1) + 1 = k^2x + k + 1 = x$

$\therefore k^2 = 1, k + 1 = 0$ 따라서 $k = -1$

6. 두 함수 $f(x) = x^3 + x^2 + x$, $g(x) = mx + n$ 에 대해 $(f \circ g)(x) = 8x^3 - 8x^2 + 4x - 1$ 이라 할 때, $m^3 + n^3$ 의 값은 얼마인가? (단, m, n 은 실수)

① 7

② 8

③ 9

④ 10

⑤ 11

해설

$(f \circ g)(x) = f(g(x))$ 임을 활용한다.

합성함수의 정의에 의하여,

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

$$= (mx + n)^3 + (mx + n)^2 + mx + n$$

$$= m^3x^3 + 3m^2nx^2 + 3mn^2x + n^3 + m^2x^2$$

$$+ 2mnx + n^2 + mx + n$$

$$= m^3x^3 + (3m^2n + m^2)x^2$$

$$+ (3mn^2 + 2mn + m)x + n^3 + n^2 + n$$

$$= 8x^3 - 8x^2 + 4x - 1$$

주어진 식은 x 에 대한 항등식이므로

$$m^3 = 8, (m - 2)(m^2 + 2m + 4) = 0$$

$$\therefore m = 2 (\because m \text{ 은 실수})$$

$$3m^2n + m^2 = -8 \text{ 에 } m = 2 \text{ 를 대입하면}$$

$$3 \cdot 2^2 \cdot n + 2^2 = -8, 12n + 4 = -8$$

$$\therefore n = -1$$

$$m = 2, n = -1 \text{ 일 때,}$$

x 의 계수와 상수항도 일치하므로

$$\therefore m = 2, n = -1$$

$$\therefore m^3 + n^3 = 2^3 + (-1)^3 = 7$$

7. 두 함수 $f(x) = 2x + 5$, $g(x) = -3x + k$ 에 대하여 $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x)$ 가 성립할 때, 상수 k 의 값은?

① -20 ② -10 ③ 0 ④ 10 ⑤ 20

해설

$$\begin{aligned}(f \circ g)(x) &= (g \circ f)(x) \text{에서} \\ -6x + 2k + 5 &= -6x - 15 + k \\ \therefore k &= -20\end{aligned}$$

8. $f(x) = -2x + 3$, $g(x) = 4x + 1$ 일 때, $f \circ g \circ h = g$ 를 만족하는 일차함수 $h(x)$ 에 대하여 $h(2)$ 의 값을 구하면?

① -3

② -1

③ 0

④ 2

⑤ 3

해설

$h(x) = ax + b$ 라고 놓고

$$(g \circ h)(x) = 4(ax + b) + 1 = 4ax + 4b + 1$$

$$(f \circ (g \circ h))(x) = -2(4ax + 4b + 1) + 3$$

$$= -8ax - 8b - 2 + 3$$

$$= 4x + 1$$

$$a = -\frac{1}{2}, \quad b = 0$$

$$h(x) = -\frac{1}{2}x$$

$$h(2) = -1$$

9. 다음 [보기]의 설명 중 옳은 것을 모두 고른 것은?

보기

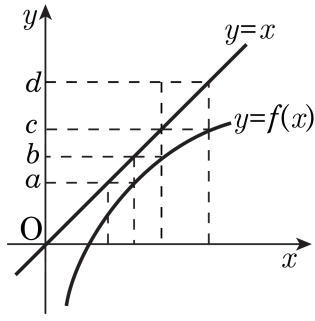
- ㉠ 임의의 자연수 x 에 대하여 $f(x) = (x \text{의 약수})$ 는 함수가 아니다.
- ㉡ 함수 f 가 일대일 함수이면 역함수가 항상 존재한다.
- ㉢ 함수의 모든 그래프는 집합으로 표현가능하다.
- ㉤ 함수 f, g 에 대하여 $f = g^{-1}$ 이면, f, g 는 $y = -x$ 에 대칭이다.
- ㉥ 임의 실수 x 에 대하여 $f(x) = [x]$ 는 일대일 함수이다. (단, $[x]$ 는 x 를 넘지 않는 최대의 정수)

- ① ㉠, ㉡, ㉢ ② ㉠, ㉢, ㉤ ③ ㉢, ㉤
- ④ ㉠, ㉢ ⑤ ㉡, ㉢, ㉤

해설

- ㉠ 함수는 변수 x 에 해당되는 y 값이 하나씩 대응되어야 한다.
 $\Rightarrow f(x) = (x \text{의 약수})$ 는 함수가 아니다 (참)
- ㉡ 반례 : $A = \{1, 2, 3\}, B = \{4, 5, 6, 7\}$ 이면 일대일 함수라도 역함수가 존재하지 않는 경우가 있다.
- ㉢ 함수는 집합으로 표현 가능하다.
- ㉤ $f = g^{-1}$ 이면 f, g 는 $y = x$ 에 대칭이다.
- ㉥ 일대일 함수는 $a \neq b$ 이면 $f(a) \neq f(b)$ 이다.
 $\therefore f(x) = [x]$ 는 일대일 함수가 아니다.

10. 아래의 그림은 두 함수 $y = f(x)$, $y = x$ 의 그래프이다. $f^{-1}(b)$ 의 값을 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : c

해설

$f^{-1}(b) = k$ 라 하면 $f(k) = b$
 $f(c) = b$ 이므로 $k = c$
따라서 $f^{-1}(b) = c$

11. $f\left(\frac{2x-1}{3}\right) = 4-2x$ 일 때, $(f \circ f)(2)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 12

해설

$\frac{2x-1}{3} = t$ 로 놓으면

$2x-1 = 3t$ 이므로 $x = \frac{3t+1}{2}$

$f(t) = 4 - 2 \cdot \frac{3t+1}{2} = -3t + 3$

$\therefore (f \circ f)(2) = f(f(2)) = f(-3) = 12$

12. 집합 $A = \{0, 1, 2, 3\}$ 에 대하여 함수 $f : A \rightarrow A$ 를

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & (x \leq 2 \text{일 때}) \\ 0 & (x > 2 \text{일 때}) \end{cases} \text{라 정의하자. 이 때, } f^{2006}(1) - f^{2006}(3)$$

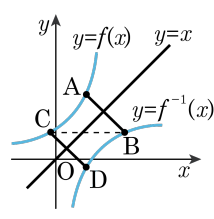
의 값은? (단, $f^2 = f \circ f$, $f^{n+1} = (f \circ f^n)$ 이다.)

- ① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

1) $f(1) = 2, f^2(1) = 3, f^3(1) = 0, f^4(1) = 1 \cdots$
 $\Rightarrow f^{2004}(1) = (f^4)^{501}(1) = 1$
 $\therefore f^{2006}(1) = f^2(1) = 3$
2) $f(3) = 0, f^2(3) = 1, f^3(3) = 2, f^4(3) = 3, f^5(3) = 0 \cdots$
 $\Rightarrow f^{2004}(3) = (f^4)^{501}(3) = 3$
 $\therefore f^{2006}(3) = f^2(3) = 1$
 $\therefore f^{2006}(1) - f^{2006}(3) = 2$

13. 다음 그림은 함수 $y = f(x)$ 와 그 역함수 $y = f^{-1}(x)$ 의 그래프이다. 점 A의 x 좌표가 a 일 때, 점 D의 y 좌표는?(단, 점선은 x 축에 평행하다.)

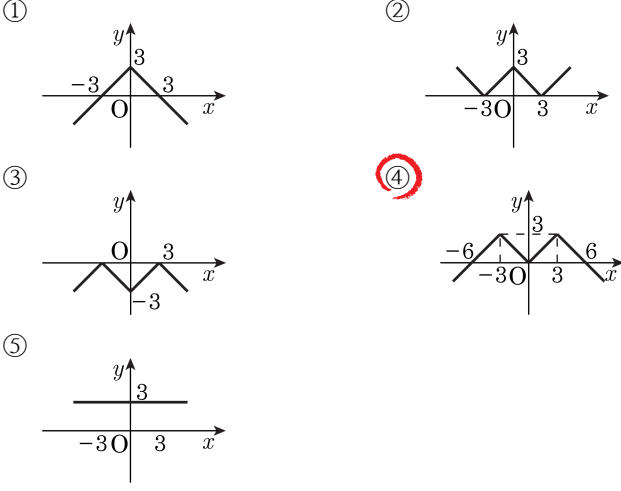


- ① $-f^{-1}(a)$ ② $-f(a)$
 ③ a ④ $f^{-1}(a)$
 ⑤ $f^{-1}(f^{-1}(a))$

해설

A $(a, f(a))$ 로 놓으면 점 B는
 점 A와 직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이므로 B $(f(a), a)$ 이다.
 또, 점 C는 점 B와 y 좌표가 같으므로 C (x, a) 로 놓으면 $f(x) = a$
 이므로 $x = f^{-1}(a) \quad \therefore C(f^{-1}(a), a)$
 그런데 점 D는 점 C와 직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이므로
 D $(a, f^{-1}(a))$
 따라서, 점 D의 y 좌표는 $f^{-1}(a)$ 이다.

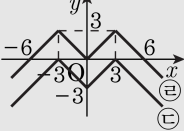
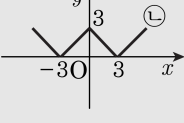
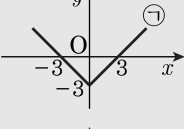
14. $f(x) = 3 - |x|$, $g(x) = |x| - 3$ 일 때, 함수 $y = (f \circ g)(x)$ 의 그래프는?



해설

$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = 3 - ||x| - 3|$ 이므로
 $y = |x| - 3$ 의 그래프는 ㉠

$y = ||x| - 3|$ 의 그래프는 ㉡



$y = -||x| - 3|$ 의 그래프는 ㉣
 $y = 3 - ||x| - 3|$ 의 그래프는 ㉤

15. 실수 전체의 집합 R 에 대하여 R 에서 R 로의 함수 $f(x)$ 가 아래와 같이 정의되었다고 하자.
- $f(x) = \begin{cases} 2x - a & (x \leq 0) \\ 3x + 1 & (x \geq 0) \end{cases}$ 함수 $f(x)$ 가 일대일대응일 때, $(f^{-1} \circ f^{-1} \circ f \circ f^{-1})(4)$ 의 값을 구하면?
- ① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

해설

$$f(x) = \begin{cases} 2x - a & (x \leq 0) \\ 3x + 1 & (x \geq 0) \end{cases}$$
$$f(0) = 1 = -a$$
$$\therefore a = -1$$
$$(f^{-1} \circ f^{-1} \circ f \circ f^{-1})(4) = (f^{-1} \circ f^{-1})(4)$$
$$(f^{-1} \circ f^{-1})(4) = f^{-1}(f^{-1}(4))$$
$$f^{-1}(4) = k \text{ 라 하면 } f(k) = 4$$
$$3k + 1 = 4 \text{ (}\because x \leq 0 \text{ 에서 } 2x + 1 \leq 1 \text{) } k = 1 \text{ 이고}$$
$$\therefore (f^{-1} \circ f^{-1})(4) = f^{-1}(1)$$
$$f^{-1}(1) = m, f(m) = 1 \text{ 에서 } 2m + 1 = 1 \text{ (또는 } 3m + 1 = 1 \text{)},$$
$$m = 0$$
$$\therefore (f^{-1} \circ f^{-1} \circ f \circ f^{-1})(4) = 0$$