1. 실수 전체의 집합 R 에서 R 로의 세 함수 f, g, h 에 대하여 $(h \circ g)(x) = 3x + 4$, $f(x) = x^2$ 일 때, $(h \circ (g \circ f))(2)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 16

해설

$$\begin{aligned}(h \circ (g \circ f))(2) &= ((h \circ g) \circ f)(2) \\ &= (h \circ g)(f(2)) \\ &= (h \circ g)(4) \\ &= 3 \times 4 + 4 = 16\end{aligned}$$

2. 함수 $y = x^2 - 2x \ (x \geq 1\ )$의 역함수를 구하면?

① $y = x^2 + 2x \ (x \geq 1)$

② $y = x^2 - 2x \ (x \leq 1)$

③ $y = \sqrt{x+1} \ (x \geq -1)$

④ $y = \sqrt{x+1} + 1 \ (x \geq -1)$

⑤ $y = \sqrt{-x+1} + 1 \ (x \leq 1)$

해설

$y = x^2 - 2x$에서 $x^2 - 2x + 1 = y + 1$

$(x-1)^2 = y + 1,\ x - 1 = \sqrt{y+1} \ (\because x \geq 1)$

$\therefore x = \sqrt{y+1} + 1$

x와 y를 바꾸어 쓰면 $y = \sqrt{x+1} + 1$

이 때, 원래의 함수

$y = x^2 - 2x = (x-1)^2 - 1 \ (x \geq 1\ )$의 치역

$\{y|y \geq -1\}$ 이

역함수 $y = \sqrt{x+1} + 1$의 정의역이 되므로

구하는 역함수는 $y = \sqrt{x+1} + 1 \ (x \geq -1)$

3. 두 함수 f, g 가 일대일대응일 때, 다음 중 $g \circ (f \circ g)^{-1}$ 와 같은 것을 고르면?

① f　　② f^{-1}　　③ g

④ g^{-1}　　⑤ $g \circ f^{-1}$

해설

$(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$ 이므로

$$\begin{aligned} g \circ (f \circ g)^{-1} &= g \circ (g^{-1} \circ f^{-1}) \\ &= (g \circ g^{-1}) \circ f^{-1} \\ &= f^{-1} \end{aligned}$$

4. 일차함수 $f(x)$ 가 $f(1) = -1,\ f^{-1}(3) = 2$ 일 때, $2f^{-1}(1)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$f(x) = ax + b\ (a \neq 0)$ 로 놓으면,
$f(1) = -1,\ f(2) = 3$ 이므로
$f(1) = a + b = -1,\ f(2) = 2a + b = 3$
즉, $a = 4,\ b = -5$
$\therefore\ f(x) = 4x - 5$
$f^{-1}(1) = a$ 로 놓으면 $f(a) = 1$
$4a - 5 = 1 \quad \therefore\ a = \dfrac{3}{2}$
따라서 $f^{-1}(1) = \dfrac{3}{2}$, $2f^{-1}(1) = 3$

5. 함수 $f(x)=kx+1$ 에 대하여 $f^{-1}=f$ 가 성립할 때, 상수 k 의 값은? (단, f^{-1} 는 f 의 역함수)

① 4 ② 3 ③ 2 ④ -1 ⑤ -2

해설

f^{-1} 이므로 $f \circ f = \mathrm{I}$

$(f \circ f)(x) = x$ 에서

$f(f(x)) = f(kx+1) = k(kx+1)+1 = k^2x+k+1 = x$

$\therefore\ k^2 = 1,\ k+1 = 0$ 따라서 $k = -1$

6. 두 함수 $f(x) = x^3 + x^2 + x$, $g(x) = mx + n$ 에 대해 $(f \circ g)(x) = 8x^3 - 8x^2 + 4x - 1$ 이라 할 때, $m^3 + n^3$ 의 값은 얼마인가? (단, m, n 은 실수)

① 7 ② 8 ③ 9 ④ 10 ⑤ 11

해설

$(f \circ g)(x) = f(g(x))$ 임을 활용한다.
합성함수의 정의에 의하여,
$(f \circ g)(x) = f(g(x))$
$= (mx + n)^3 + (mx + n)^2 + mx + n$
$= m^3x^3 + 3m^2nx^2 + 3mn^2x + n^3 + m^2x^2$
$+2mnx + n^2 + mx + n$
$= m^3x^3 + (3m^2n + m^2)x^2$
$+(3mn^2 + 2mn + m)x + n^3 + n^2 + n$
$= 8x^3 - 8x^2 + 4x - 1$
주어진 식은 x 에 대한 항등식이므로
$m^3 = 8, (m - 2)(m^2 + 2m + 4) = 0$
$\therefore m = 2(\because m$ 은 실수)
$3m^2n + m^2 = -8$ 에 $m = 2$ 를 대입하면
$3 \cdot 2^2 \cdot n + 2^2 = -8, 12n + 4 = -8$
$\therefore n = -1$
$m = 2, n = -1$ 일 때,
x 의 계수와 상수항도 일치하므로
$\therefore m = 2, n = -1$
$\therefore m^3 + n^3 = 2^3 + (-1)^3 = 7$

7. 두 함수 $f(x)=2x+5$, $g(x)=-3x+k$에 대하여 $(f\circ g)(x)=(g\circ f)(x)$가 성립할 때, 상수 k 의 값은?

① -20　② -10　③ 0　④ 10　⑤ 20

해설

$(f\circ g)(x)=(g\circ f)(x)$에서

$-6x+2k+5=-6x-15+k$

$\therefore\ k=-20$

8. $f(x) = -2x + 3,\ g(x) = 4x + 1$ 일 때, $f \circ g \circ h = g$ 를 만족하는 일차함수 $h(x)$ 에 대하여 $h(2)$ 의 값을 구하면?

① -3 ② -1 ③ 0 ④ 2 ⑤ 3

해설

$h(x) = ax + b$ 라고 놓고

$(g \circ h)(x) = 4(ax + b) + 1 = 4ax + 4b + 1$

$$\begin{aligned}(f \circ (g \circ h))(x) &= -2(4ax + 4b + 1) + 3 \\ &= -8ax - 8b - 2 + 3 \\ &= 4x + 1\end{aligned}$$

$a = -\dfrac{1}{2}$, $b = 0$

$h(x) = -\dfrac{1}{2}x$

$h(2) = -1$

9. 다음 [보기] 의 설명 중 옳은 것을 모두 고른 것은?

보기

㉠ 임의의 자연수 x 에 대하여 $f(x) = (x$ 의 약수$)$ 는 함수가 아니다.

㉡ 함수 f 가 일대일 함수이면 역함수가 항상 존재한다.

㉢ 함수의 모든 그래프는 집합으로 표현가능하다.

㉣ 함수 f , g 에 대하여 $f = g^{-1}$ 이면, f , g 는 $y = -x$ 에 대칭이다.

㉤ 임의 실수 x 에 대하여 $f(x) = [x]$ 는 일대일 함수이다. (단, $[x]$ 는 x 를 넘지 않는 최대의 정수)

① ㉠, ㉡, ㉢ ② ㉠, ㉢, ㉤ ③ ㉢, ㉤

④ ㉠, ㉢ ⑤ ㉡, ㉢, ㉣

해설

㉠ 함수는 변수 x 에 행당되는 y 값이 하나씩 대응되어야 한다.
$\Rightarrow f(x) = (\ x$ 의 약수 $)$ 는 함수가 아니다 (참)

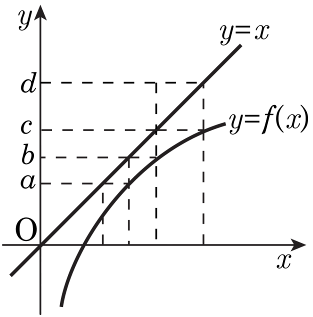
㉡ 반례 : $A = \{1, 2, 3\}, B = \{4, 5, 6, 7\}$ 이면 일대일 함수라도 역함수가 존재하지 않는 경우가 있다.

㉢ 함수는 집합으로 표현 가능하다.

㉣ $f = g^{-1}$ 이면 f, g 는 $y = x$ 에 대칭이다.

㉤ 일대일 함수는 $a \neq b$ 이면 $f(a) \neq f(b)$ 이다.
$\therefore f(x) = [x]$ 는 일대일 함수가 아니다.

10. 아래의 그림은 두 함수 $y = f(x)$, $y = x$ 의 그래프이다. $f^{-1}(b)$ 의 값을 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : c

해설

$f^{-1}(b) = k$ 라 하면 $f(k) = b$

$f(c) = b$ 이므로 $k = c$

따라서 $f^{-1}(b) = c$

11. $f\left(\frac{2x-1}{3}\right)=4-2x$ 일 때, $(f\circ f)(2)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 12

해설

$\frac{2x-1}{3}=t$ 로 놓으면

$2x-1=3t$ 이므로 $x=\frac{3t+1}{2}$

$f(t)=4-2\cdot\frac{3t+1}{2}=-3t+3$

$\therefore (f\circ f)(2)=f(f(2))=f(-3)=12$

12. 집합 $A=\{0,1,2,3\}$에 대하여 함수 $f:A\to A$를

$$f(x)=\begin{cases} x+1 & (x\le 2\text{일 때}) \\ 0 & (x>2\text{일 때}) \end{cases}$$

라 정의하자. 이 때, $f^{2006}(1)-f^{2006}(3)$의 값은? (단, $f^2=f\circ f$, $f^{n+1}=(f\circ f^n)$ 이다.)

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

1) $f(1)=2,\ f^2(1)=3,\ f^3(1)=0,\ f^4(1)=1\cdots$

$\Rightarrow f^{2004}(1)=(f^4)^{501}(1)=1$

$\therefore\ f^{2006}(1)=f^2(1)=3$

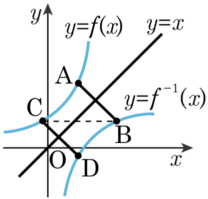
2) $f(3)=0,\ f^2(3)=1,\ f^3(3)=2,\ f^4(3)=3,\ f^5(3)=0\cdots$

$\Rightarrow f^{2004}(3)=(f^4)^{501}=3$

$\therefore f^{2006}(3)=f^2(3)=1$

$\therefore f^{2006}(1)-f^{2006}(3)=2$

13. 다음 그림은 함수 $y = f(x)$와 그 역함수 $y = f^{-1}(x)$의 그래프이다. 점 A의 x좌표가 a일 때, 점 D의 y좌표는?(단, 점선은 x축에 평행하다.)



① $-f^{-1}(a)$　　② $-f(a)$

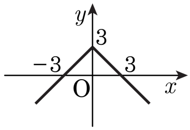
③ a　　④ $f^{-1}(a)$

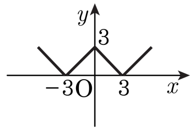
⑤ $f^{-1}(f^{-1}(a))$

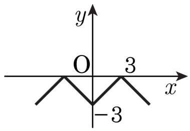
해설

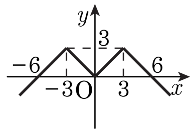
$A(a,\ f(a))$로 놓으면 점 B는
점 A와 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 $B(f(a),\ a)$이다.
또, 점 C는 점 B와 y좌표가 같으므로 $C(x,\ a)$로 놓으면 $f(x)=a$ 이므로
$x=f^{-1}(a)$　　$\therefore C(f^{-1}(a),\ a)$
그런데 점 D는 점 C와 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 $D(a,\ f^{-1}(a))$
따라서, 점 D의 y좌표는 $f^{-1}(a)$이다.

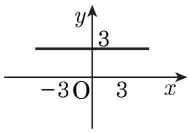
14. $f(x)=3-|x|$, $g(x)=|x|-3$ 일 때, 함수 $y=(f\circ g)(x)$ 의 그래프는?

①


②


③


④


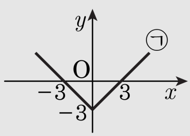
⑤


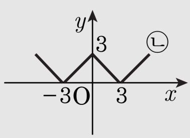
해설

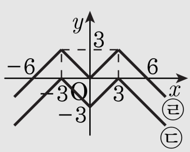
$(f\circ g)(x)=f(g(x))=3-||x|-3|$ 이므로

$y=|x|-3$ 의 그래프는 ㉠

$y=||x|-3|$ 의 그래프는 ㉡







$y=-||x|-3|$ 의 그래프는 ㉢

$y=3-||x|-3|$ 의 그래프는 ㉣

15. 실수 전체의 집합 R 에 대하여 R 에서 R 로의 함수 $f(x)$ 가 아래와 같이 정의되었다고 하자.

$f(x)=\begin{cases} 2x-a & (x\le 0) \\ 3x+1 & (x\ge 0) \end{cases}$ 함수 $f(x)$ 가 일대일대응일 때, $(f^{-1}\circ f^{-1}\circ f\circ f^{-1})(4)$ 의 값을 구하면?

① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

해설

$$f(x)=\begin{cases} 2x-a & (x\le 0) \\ 3x+1 & (x\ge 0) \end{cases}$$

$f(0)=1=-a$

$\therefore a=-1$

$(f^{-1}\circ f^{-1}\circ f\circ f^{-1})(4)=(f^{-1}\circ f^{-1})(4)$

$(f^{-1}\circ f^{-1})(4)=f^{-1}(f^{-1}(4))$

$f^{-1}(4)=k$ 라 하면 $f(k)=4$

$3k+1=4$ ($\because x\le 0$ 에서 $2x+1\le 1$)$k=1$ 이고

$\therefore (f^{-1}\circ f^{-1})(4)=f^{-1}(1)$

$f^{-1}(1)=m, f(m)=1$ 에서 $2m+1=1$ (또는 $3m+1=1$), $m=0$

$\therefore (f^{-1}\circ f^{-1}\circ f\circ f^{-1})(4)=0$