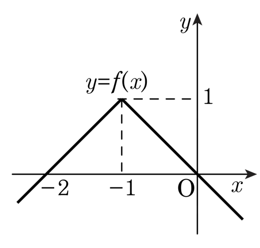
1. 함수 $y = f(x)$ 의 그래프가 다음 그림과 같을 때, 이 그래프의 관계식을 구하면?



① $y = |x-1| - 1$

② $y = |x+1| - 1$

③ $y = |x-1| + 1$

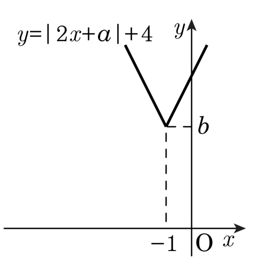
④ $y = -|x+1| + 1$

⑤ $y = -|x+1| - 1$

해설

주어진 그래프는 함수 $y = -|x|$ 의 그래프를
x 축의 방향으로 -1 만큼,
y 축의 방향으로 1 만큼 평행이동한 것이므로
$y = -|x|$ 에 x 대신 $x+1$,
y 대신 $y-1$ 을 대입하면 $y-1 = -|x+1|$
즉, $f(x) = -|x+1| + 1$ 이므로 $y = -|x+1| + 1$

2. 함수 $y=|\,2x+a\,|+4$ 의 그래프가 다음 그림과 같이 점 $(-1,b)$ 를 지난다. 이때, 두 상수 a,b 의 곱 ab 의 값을 구하면?



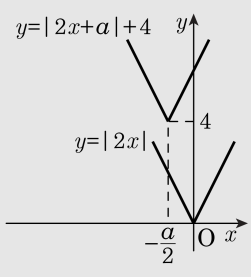
① 2　　② 4　　③ 6

④ 8　　⑤ 10

해설

$y=|\,2x+a\,|+4$

$=\left|2\left(x+\dfrac{a}{2}\right)\right|+4$



즉, 함수 $y=|\,2x+a\,|+4$ 의 그래프는 함수 $y=|\,2x\,|$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 $-\dfrac{a}{2}$ 만큼, y 축의 방향으로 4 만큼 평행이동한 것이다.

이때, 그래프의 꺾인 점의 좌표는 $\left(-\dfrac{a}{2},4\right)$ 이고,

문제에서 $(-1,b)$ 이므로

$-\dfrac{a}{2}=-1,\ b=4$

$\therefore\ a=2,\ b=4 \qquad \therefore\ ab=8$

3. 함수 $y = |x+1| - |x-3|$ 의 최댓값을 M, 최솟값을 m 이라 할 때, $M - m$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

$y = |x+1| - |x-3|$ 에서

i) $x < -1$ 일 때

$y = -(x+1) + x - 3 = -4$

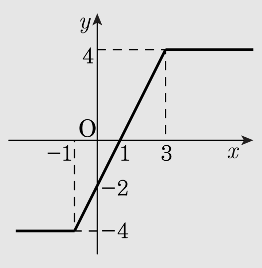
ii) $-1 \le x < 3$ 일 때

$y = x + 1 + x - 3 = 2x - 2$

iii) $x \ge 3$ 일 때

$y = x + 1 - (x - 3) = 4$

이상에서 주어진 함수의 그래프가 다음 그림과 같으므로



$M = 4, m = -4$

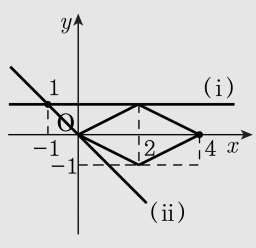
$\therefore M - m = 4 - (-4)$

$= 8$

4. $|x-2|+2|y|=2$ 의 그래프와 직선 $y=mx+m+1$ 이 만나도록 하는 m 의 최댓값과 최솟값의 합을 구하면?

① -2　　② -1　　③ 0　　④ 1　　⑤ 2

해설



함수 $|x-2|+2|y|=2$ 의 그래프는
$|x|+2|y|=2$ 의 그래프를
x축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.
이때, $|x|+2|y|=2$ 의 그래프는
$x+2y=2$ 의 그래프에서
$x \geq 0$, $y \geq 0$ 인 부분을
각각 x 축, y 축, 원점에 대하여 대칭이동한 것이고, 이를 x 축의 방향으로 2 만큼 평행이동하면 $|x-2|+2|y|=2$ 의 그래프는 다음 그림과 같다.
직선 $y=mx+m+1$ 은 m 의 값에 관계없이 점 $(-1,\ 1)$ 을 지나므로 두 그래프가 만나려면
(i) $m \leq 0$
(ii) $y=mx+m+1$ 이 원점을 지날 때
$0=m+1$ 에서 $m=-1$ 이므로 $m \geq -1$
(i), (ii) 에서 m 의 값의 범위는 $-1 \leq m \leq 0$
따라서 m 의 최댓값과 최솟값의 합은 -1 이다.

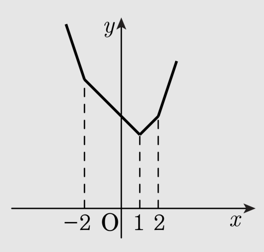
5. 수직선 위에 세 점 A(−2), B(1), C(2)가 있다. 수직선 위에 한 점 P 를 잡아 $\overline{\mathrm{PA}}+\overline{\mathrm{PB}}+\overline{\mathrm{PC}}$ 를 최소가 되게 할 때, 점 P 의 좌표를 구하면?

① P(−2)　　② P(−1)　　③ P(0)

④ P(1)　　⑤ P(2)

해설

점 P 의 좌표를 $\mathrm{P}(x)$ 라 하면
$\overline{\mathrm{PA}}+\overline{\mathrm{PB}}+\overline{\mathrm{PC}}=|x+2|+|x-1|+|x-2|$
$y=|x+2|+|x-1|+|x-2|$ 의
그래프의 개형은
다음 그림과 같으므로 $x=1$ 에서 최솟값을 가진다.
따라서 구하는 점 P 의 좌표는 P(1) 이다.

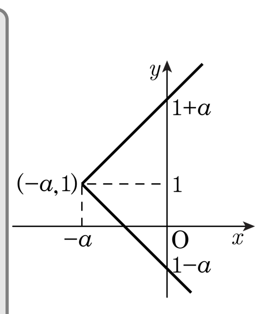


6. $| y-1 |= x+a$ 의 그래프와 y 축으로 둘러싸인 삼각형의 넓이가 4 일 때, 양수 a 의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$| y-1 |= x+a$ 의 그래프는 $| y |= x$를 x 축 음의 방향으로 a, y 축 양의 방향으로 1 만큼 평행이동시킨 그래프이므로 다음 그림과 같다.



이때, y 절편은 $| y-1 |= a$ 에서 $y = 1\pm a$

$\therefore\ S = \frac{1}{2}\cdot 2a\cdot a = 4 \quad \therefore\ a = 2(a > 0)$

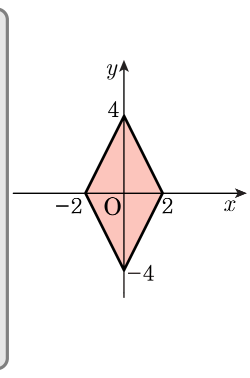
7. 함수 $2\,|\,x\,|+|\,y\,|=4$ 의 그래프로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 16

해설

$2\,|\,x\,|+|\,y\,|=4$ 의 그래프는 $2x+y=4$,
즉 $y=-2x+4$ 의 그래프에서
$x\geq 0,\ y\geq 0$ 인 부분만 남기고,
이 그래프를 x축, y축, 원점에 대하여 각각 대칭시킨 것이므로 다음 그림과 같다.
따라서 구하는 도형의 넓이는 $8\times4\times\frac{1}{2}=16$



8. 수직선 위에 네 점 A(-2), B(0), C(1) 이 있다. 이 수직선 위의 점 P 에 대하여 $\overline{\mathrm{PA}}+\overline{\mathrm{PB}}+\overline{\mathrm{PC}}$ 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

점 P 의 좌표를 P(x) 라고 하면
$\overline{\mathrm{PA}}=|x+2|$, $\overline{\mathrm{PB}}=|x|$, $\overline{\mathrm{PC}}=|x-1|$,
$\overline{\mathrm{PA}}+\overline{\mathrm{PB}}+\overline{\mathrm{PC}}=|x+2|+|x|+|x-1|$ 이므로
$y=|x+2|+|x|+|x-1|$ 로 놓고
$x=-2,\ 0,\ 1$ 을 경계로 하여 구간을 나누면 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$y=\begin{cases}-3x-1 & (x<-2\text{일 때})\\ -x+3 & (-2\le x<0\text{일 때})\\ x+3 & (0\le x<1\text{일 때})\\ 3x+1 & (x\ge 1\text{일 때})\end{cases}$$

따라서, $y=|x+2|+|x|+|x-1|$ 의 그래프가 다음 그림과 같으므로 구하는 최솟값은 3 이다.