1. 자연수 전체의 집합에서 정의된 함수

$f(n) = \begin{cases} n-2 & (n \geq 100\text{일때}) \\ f(f(n+4)) & (n < 100\text{일때}) \end{cases}$ 에서 $f(96)$ 의 값을 구하면?

① 78 ② 80 ③ 98 ④ 99 ⑤ 100

해설

$f(96) = f(f(100)),\ f(100) = 98,$
$f(98) = f(f(102)),\ f(102) = 100$
$\therefore f(96) = 98$

2. 자연수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)$ 가 다음 두 조건을 만족시킬 때, $f(1280)$ 의 값은 얼마인가?

(i) $f(2x) = f(x)\ (x = 1, 2, 3, \ldots)$
(ii) $f(2x+1) = 2^x\ (x = 0, 1, 2, 3, \cdots)$

① 2　② 4　③ 8　④ 16　⑤ 32

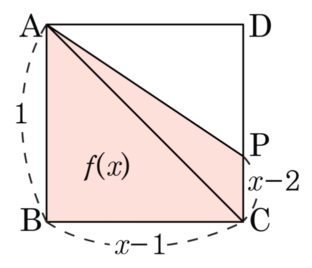
해설

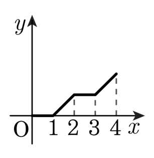
$1280 = 2^8 \cdot 5$ 이므로,

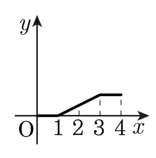
$$f(2^8 \cdot 5) = f(2^7 \cdot 5) = f(2^6 \cdot 5) = \cdots = f(5)$$
$$= f(2 \cdot 2 + 1)$$ 이므로,

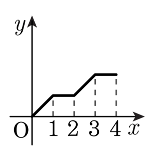
$$f(2 \cdot 2 + 1) = 2^2 = 4$$

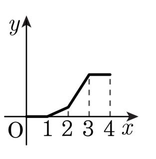
3. 다음 그림과 같이 한 변의 길이가 1 인 정사각형의 변 $ABCD$ 위를 움직이는 동점 P가 있다. 점 P는 A 점에서 출발, 일정한 속력으로 점 B를 돌아 다시 점 A로 돌아온다. 점 P가 움직인 거리를 x, 선분 AP가 지나간 부분의 넓이를 $f(x)$라 할 때, 다음 중 함수 $y = f(x)$ 의 그래프의 개형으로 옳은 것은?

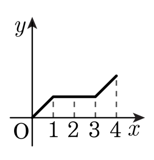


①


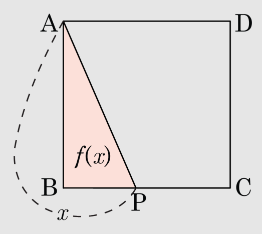
②


③


④


⑤


해설



x 의 크기에 따른 넓이의 변화를 살펴보면

$$f(x) = \begin{cases} 0 & (0 \le x \le 1) \\ \frac{1}{2}(x-1) & (1 \le x \le 2) \\ \frac{1}{2}(x-1) & (2 \le x \le 3) \\ 1 & (3 \le x \le 4) \end{cases}$$ 한편, 각 구간의 경계점에서

함수는 연속이므로 ②가 옳다.

4. R 가 실수 전체의 집합일 때, R 에서 R 로의 함수 f 를 다음과 같이 정의한다.

$$f : x \rightarrow a\,|\,x-1\,|+(2-a)x+a \ (x \in R,\ a \in R)$$

함수 f 가 일대일 대응이 되도록 하는 a 의 값의 범위는?

① $a < -1$　　② $a \le -1$　　③ $a > -1$

④ $a < 1$　　⑤ $a \le 1$

해설

$f(x) = a|x-1|+(2-a)x+a$ 에서 $x \ge 1,\ x < 1$ 인 경우로 나누면,
$x \ge 1$ 일 때, $f(x) = a(x-1)+(2-a)x+a$
$x < 1$ 일 때, $f(x) = a(1-x)+(2-a)x+a$

$$\therefore\ f(x) = \begin{cases} 2x & (x \ge 1) \\ -2(a-1)x+2a & (x < 1) \end{cases}$$

함수 $f(x)$ 가 R 에서 R 로의 일대일 대응이려면
$x \ge 1$ 에서 기울기가 양이므로 $x < 1$ 에서도 기울기가 양이어야 한다.
즉, $-2(a-1) > 0,\ a-1 < 0$
$\therefore\ a < 1$

5. 집합 $U = \{1, 2, 3, 4\}$ 의 부분집합 X, Y 가 $X \cup Y = U,\ X \cap Y = \varnothing$ 을 만족한다고 한다. 이 때, X 에서 Y 로의 일대일 대응이 되는 함수 f 의 개수를 구하면?

▶ 답 : ______ 개

▷ 정답 : 12 개

해설

$U = \{1, 2, 3, 4\}$ 에서 $X,\ Y \subset U,\ X \cup Y = U,$
$X \cup Y = \varnothing$ 이다.
$f\ :\ X\ \rightarrow\ Y$ 이 일대일 대응이 되려면
$n(X) = n(Y)$
$n(X \cup Y) = n(U) = 4,\ X \cup Y = \varnothing$ 이므로
$n(X) + n(Y) = 4$ 이다.
$\therefore\ n(X) = n(Y) = 2$
$X = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}\}$ 의 6 가지 경우가 생기며
X 에서 Y 로의 대응방법이 각각 2 가지씩 생기므로
$\therefore\ 2 \times 6 = 12$

6. 두 집합 $X=\{-1,\ 0,\ 1\}$, $Y=\{-2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2\}$에 대하여 X 에서 Y 로의 함수 중 다음 조건을 모두 만족시키는 함수 f 의 개수는 몇 개인가?

> X 의 임의의 두 원소 $x_1,\ x_2$ 에 대하여
> Ⅰ. $f(x_1+x_2)=f(x_1)+f(x_2)$
> Ⅱ. $f(x_1)=f(x_2)$ 이면 $x_1=x_2$

① 2 개　② 4 개　③ 6 개　④ 8 개　⑤ 12 개

해설

조건 Ⅰ 에서, $x_1=0,\ x_2=0$ 이면
$f(0)=f(0)+f(0)$ 에서 $f(0)=0$
$x_1=1,\ x_2=-1$ 이면
$f(0)=f(1)+f(-1)$ 에서, $f(-1)=-f(1)$
이때, 조건 Ⅱ 에 의해
$f(1)\neq 0,\ f(-1)\neq 0$
따라서, 두 조건을 만족시키는
함수 f 의 개수는 0 이 대응 할 수 있는
원소는 0 의 1 가지,
1 이 대응할 수 있는 원소는
$-2,\ -1,\ 1,\ 2$ 의 4 가지,
-1 이 대응할 수 있는 원소는 $-f(1)$ 의 1 가지,
따라서, $1\times 4\times 1=4$ (개)

7. 다음 보기의 함수 $f(x)$ 중 $(f \circ f \circ f)(x) = f(x)$ 가 성립하는 것을 모두 고른 것은?

보기

㉠ $f(x) = x + 1$　　㉡ $f(x) = -x$

㉢ $f(x) = -x + 1$

① ㉠　② ㉡　③ ㉢　④ ㉠, ㉢　⑤ ㉡, ㉢

해설

㉠. $(f \circ f \circ f)(x) = f(f(f(x))) = f(f(x+1))$
$= f((x+1)+1) = f(x+2)$
$= (x+2)+1 = x+3$
$\therefore (f \circ f \circ f)(x) \neq f(x)$

㉡. $(f \circ f \circ f)(x) = f(f(f(x))) = f(f(-x))$
$= f(-(-x)) = f(x)$

㉢. $(f \circ f \circ f)(x) = f(f(f(x))) = f(f(-x+1))$
$= f(-(-x+1)+1) = f(x)$

따라서 $(f \circ f \circ f)(x) = f(x)$ 가 성립하는 것은 ㉡, ㉢ 이다.

8. 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f,\ g$가 $f(x) = ax + b,\ g(x) = 2x^2 + 3x + 1$이고, 모든 실수 x에 대하여 $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x)$를 만족할 때, $f(1) + f(2) + f(3) + \cdots + f(10)$의 값은?(단, $a \neq 0$)

① 60 ② 55 ③ 51 ④ 48 ⑤ 45

해설

$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = a(2x^2 + 3x + 1) + b$
$= 2ax^2 + 3ax + a + b \cdots\cdots$ ㉠
$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = 2(ax + b)^2 + 3(ax + b) + 1$
$= 2a^2x^2 + (4ab + 3a)x + 2b^2 + 3b + 1 \cdots\cdots$ ㉡
모든 실수 x에 대하여 ㉠ = ㉡이므로
$2a = 2a^2,\ 3a = 4ab + 3a,\ a + b = 2b^2 + 3b + 1$
위의 식을 연립하여 풀면 $a = 1,\ b = 0 (\because a \neq 0)$
즉, $f(x) = x$이므로
$f(1) + f(2) + f(3) + \cdots + f(10)$
$= 1 + 2 + 3 + \cdots + 10 = 55$

9. $f\left(\frac{2x-1}{3}\right)=4-2x$ 일 때, $(f\circ f)(2)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 12

해설

$\frac{2x-1}{3}=t$ 로 놓으면

$2x-1=3t$ 이므로 $x=\frac{3t+1}{2}$

$f(t)=4-2\cdot\frac{3t+1}{2}=-3t+3$

$\therefore (f\circ f)(2)=f(f(2))=f(-3)=12$

10. 함수 $f(x)=\dfrac{-3x+1}{x+3}$ 에 대하여 $f^1=f,\ f^{n+1}=f\circ f^n (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ 이라 할 때, $f^{2006}(-2)+f^{2007}(-2)$ 의 값은?

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

해설

$f(-2)=\dfrac{6+1}{-2+3}=7$

$f^2(-2)=f(f(-2))=f(7)=-2$

$f^3(-2)=f(f^2(-2))=f(-2)=7$

$f^4(-2)=f(f^3(-2))=f(7)=-2$

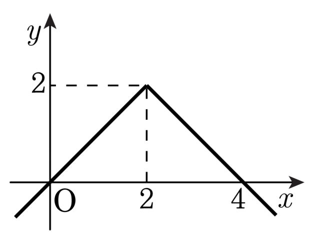
$\vdots$

$f^{2006}(-2)=-2$

$f^{2007}(-2)=7$

$\therefore\ f^{2006}(-2)+f^{2007}(-2)=-2+7=5$

11. $y = f(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같을 때, 방정식 $(f \circ f)(x) = 1$의 서로 다른 실근의 개수는?



① 1 개 ② 2 개 ③ 3 개

④ 4 개 ⑤ 무수히 많다.

해설

$$f(x) = \begin{cases} y = x(x \le 2) & \cdots ㉠ \\ y = -x + 4(x > 2) & \cdots ㉡ \end{cases}$$

㉠에서는 $(f \circ f)(x) = f(f(x)) = f(x) = x$

$\therefore x = 1$

㉡에서는 $(f \circ f)(x) = f(f(x)) = f(-x+4)$
$= -x + 4$

$\therefore x = 3$

실근의 개수 : 2 개.

12. 실수 전체의 집합 R에서 R로의 함수 f를 $f: x \rightarrow a|x-1|+(2-a)x+a$ 와 같이 정의한다. 함수 f의 역함수가 존재할 때, 상수 a의 값의 범위를 구하면?

① $a<1$　　② $a>1$　　③ $0<a<2$

④ $-\frac{1}{2}<a<2$　　⑤ $0<a<\frac{2}{3}$

해설

역함수가 존재하려면 일대일대응이어야 한다.

$f(x)=a|x-1|+(2-a)x+a$

$$=\begin{cases} 2x & (x \geq 1) \\ (2-2a)x+2a & (x<1) \end{cases}$$

가 일대일대응이려면 $x \geq 1$에서 증가함수이므로 $x<1$에서도 증가함수 이어야 한다.

즉, $2-2a>0$에서 $a<1$

13. 함수 $f(x)$ 가 $f\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)=2x(x\neq 1)$ 를 만족할 때 $f(x)$ 의 역함수 $f^{-1}(x)$ 의 식은?

① $\dfrac{x+2}{x-2}(x\neq 2)$ ② $\dfrac{x+1}{x-2}(x\neq 2)$ ③ $\dfrac{x-1}{x-2}\ (x\neq -1)$
④ $\dfrac{x+2}{x+1}(x\neq -1)$ ⑤ $\dfrac{x+2}{x-1}(x\neq 1)$

해설

$f\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)=2x$ 에서

$\dfrac{x+1}{x-1}=t$ 로 놓으면 $x=\dfrac{t+1}{t-1}$

$\therefore f(t)=\dfrac{2(t+1)}{t-1},\ f(x)=\dfrac{2(x+1)}{x-1}$

$y=\dfrac{2(x+1)}{x-1}$ 이면

$yx-y=2x+2$ 에서 $x=\dfrac{y+2}{y-2}$

$\therefore f^{-1}(x)=\dfrac{x+2}{x-2}\ (x\neq 2)$

14. $g(x) = 2 + \frac{7}{x-2}$ 에 대해 $(f^{-1} \circ g^{-1})^{-1}(x) = x$ 를 만족시키는 $f(x)$ 의 값은?(단, f^{-1}, g^{-1} 은 $f(x)$, $g(x)$ 의 역함수)

① $\frac{2x-3}{x+2}$ ② $\frac{x-2}{2x+3}$ ③ $\frac{2x+3}{x-2}$
④ $\frac{x+2}{2x-3}$ ⑤ $\frac{x-2}{2x-3}$

해설

$(f^{-1} \circ g^{-1})^{-1}(x) = (g \circ f)(x) = g\{f(x)\}$

$\therefore\ g\{f(x)\} = 2 + \frac{7}{f(x)-2} = x$

$\rightarrow\ \frac{7}{f(x)-2} = x - 2$

$\rightarrow\ 7 = \{f(x) - 2\}(x-2)$

$\rightarrow\ 7 = xf(x) - 2f(x) - 2x + 4$

$\rightarrow\ 2x + 3 = f(x)(x-2)$

$\therefore\ f(x) = \frac{2x+3}{x-2}$

해설

$(f^{-1} \circ g^{-1})^{-1}(x) = (g \circ f)(x) = x$ 에서

$f(x) = g^{-1}(x)$

$g(x) = 2 + \frac{7}{x-2}$ 에서 역함수를 구하기 위해 x, y 를 바꾸면

$x = 2 + \frac{7}{y-2}$, $(x-2)(y-2) = 7$

$y - 2 = \frac{7}{x-2}$, $y = \frac{7}{x-2} + 2 = \frac{2x+3}{x-2}$

$\therefore f(x) = g^{-1}(x) = \frac{2x+3}{x-2}$

15. $f(5) = 10$, $f(10) = 30$ 이고 $g(x) = ax - 10$ 인 두 함수 $f(x)$, $g(x)$ 에 대하여 $f^{-1} \circ g = f$ 를 만족하는 상수 a 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $a = 8$

해설

$f \circ (f^{-1} \circ g) = f \circ f$ 에서
$g = f \circ f \cdots$ ㉠
$g(5) = f(f(5)) = f(10) = 30 \cdots$ ㉡
$\therefore\ 5a - 10 = 30$
따라서 구하는 a 의 값은 8 이다.

16. $\begin{cases} 2x+1 & (x \geq 1) \\ x+2 & (x<1) \end{cases}$ 에 대하여 $f^{-1}(5)+f^{-1}(k)=-2$ 일 때, k 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $k=-2$

해설

$f(x)=\begin{cases} 2x+1 & (x \geq 1) \\ x+2 & (x<1) \end{cases}$ 에서

$x \geq 1$ 일 때, $f(x) \geq 3$ 이며

$x<1$ 일 때, $f(x)<3$ 이다.

이 때, $f^{-1}(5)+f^{-1}(k)=-2$ 에서

$f^{-1}(5)=a$ 라고 놓으면

$f(a)=5 \geq 3$ 이므로 $f(a)=2a+1=5$

$\therefore a=2$

그러므로 $f^{-1}(k)=-4$

$f(-4)=-4+2=k\ (\because -4<3)$

$\therefore k=-2$

17. 함수 $f(x) = x^2 - 4x + 6(x \geq 2)$ 의 역함수를 $g(x)$ 라 할 때, $y = f(x)$ 와 $y = g(x)$ 의 그래프의 두 교점 사이의 거리를 구했을 때, 옳은 것은 무엇인가?

① 1 ② $\sqrt{2}$ ③ $\sqrt{3}$ ④ 2 ⑤ $\sqrt{5}$

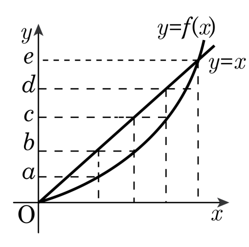
해설

$y = f(x)$ 와 $y = g(x)$ 의 그래프의 두 교점은
$y = f(x)$ 의 그래프와 직선 $y = x$ 의 교점과 같다.
$x^2 - 4x + 6 = x$ 에서
$x^2 - 5x + 6 = 0, (x-2)(x-3) = 0$
$\therefore x = 2$ 또는 $x = 3$
따라서 $y = f(x)$ 와 $y = g(x)$ 의 그래프의
두 교점은 $(2, 2), (3, 3)$ 이고,
이 두 교점 사이의 거리는
$\sqrt{(3-2)^2 + (3-2)^2} = \sqrt{2}$

해설

$x^2 - 4x + 6 = x$,
즉 $x^2 - 5x + 6 = 0$ 의 두 근을 α, β 라 하면
이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
$\alpha + \beta = 5, \alpha\beta = 6$
따라서 $y = f(x)$ 와 $y = g(x)$ 의
그래프의 두 교점은 $(\alpha, \alpha), (\beta, \beta)$ 사이의 거리는
$\sqrt{(\alpha - \beta)^2 + (\alpha - \beta)^2} = \sqrt{2}\sqrt{(\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta}$
$= \sqrt{2}\sqrt{5^2 - 4 \cdot 6} = \sqrt{2}$

18. 다음 그림은 두 함수 $y = f(x)$ 와 $y = x$ 의 그래프이다. $(f \circ f)^{-1}(b)$ 의 값은?



① a　② b　③ c　④ d　⑤ e

해설

$(f \circ f)^{-1}(b) = (f^{-1} \circ f^{-1})(b) = f^{-1}(f^{-1}(b))$

$f^{-1}(b) = k$ 라고 하면, $f(k) = b$

$\therefore\ k = c$　　$\therefore\ f^{-1}(f^{-1}(b)) = f^{-1}(c)$

또, $f^{-1}(c) = t$ 라고 하면, $f(t) = c$

$\therefore\ t = d$　　$\therefore\ (f \circ f)^{-1}(b) = d$