

1. 함수 $y = \frac{2x-4}{x-3}$ 에 관한 설명 중 틀린 것을 고르면?

- ① 점근선 중 하나는 $x = 3$ 이다.
- ② 점근선 중 하나는 $y = 2$ 이다.
- ③ 함수 $y = \frac{2}{x} + 2$ 의 그래프를 x 축 방향으로 3만큼 평행이동한 그래프다.
- ④ 이 그래프는 x 축을 지나지 않는다.
- ⑤ 함수 $y = \frac{2}{x-3}$ 의 그래프를 y 축 방향으로 2만큼 평행이동한 그래프다.

해설

$y = \frac{2x-4}{x-3} = \frac{2(x-3)+2}{x-3} = \frac{2}{x-3} + 2$
그러므로 함수의 점근선은 $x = 3$, $y = 2$ 이고
 $y = \frac{2}{x}$ 의 그래프를 x 축 방향으로 3만큼,
 y 축 방향으로 2만큼 평행이동한 그래프이다.
따라서 설명 중 틀린 것은 ④이다.

2. $y = \frac{-3}{x+1} + 1$ 의 그래프에 대한 설명 중 옳지 않은 것은?

- ① $y = \frac{-3}{x}$ 의 그래프를 x 축으로 1, y 축으로 1만큼 평행이동한 그래프이다.
- ② 치역은 $\mathbb{R} - \{1\}$ 이다.
- ③ $y = \frac{-3}{x+1}$ 의 그래프를 y 축으로 1만큼 평행이동한 그래프이다.
- ④ 점근선은 $x = -1$, $y = 1$ 이다.
- ⑤ 정의역은 $\mathbb{R} - \{-1\}$ 이다.

해설

$y = \frac{-3}{x+1} + 1$ 의 그래프는 $y = \frac{-3}{x}$ 의 그래프를 x 축 방향으로 -1만큼,
 y 축 방향으로 1만큼 평행이동시킨 그래프이다.
따라서 옳지 않은 것은 ①이다.

3. $2 \leq x \leq 3$ 에서 부등식 $ax + 1 \leq \frac{x+1}{x-1} \leq bx + 1$ 이 항상 성립할 때, a 의 최댓값과 b 의 최솟값의 합을 구하면?

- ① $\frac{1}{3}$
- ② $\frac{2}{3}$
- ③ 1
- ④ $\frac{4}{3}$
- ⑤ $\frac{5}{3}$

해설

$$y = \frac{x+1}{x-1} = \frac{x-1+2}{x-1} = \frac{2}{x-1} + 1$$

따라서, 분수함수 $y = \frac{x+1}{x-1}$ 의 그래프는

$y = \frac{2}{x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로

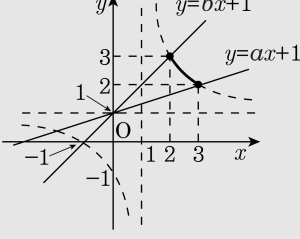
1만큼, y 축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.

두 직선 $y = ax + 1$, $y = bx + 1$ 은 a , b 의 값에

관계없이 점 $(0, 1)$ 을 지나는 직선이므로

$2 \leq x \leq 3$ 에서 $ax + 1 \leq \frac{x+1}{x-1} \leq bx + 1$ 이 항상 성립하려면 다음
그림에서 $a \leq \frac{1}{3}$, $b \geq 1$

따라서, a 의 최댓값은 $\frac{1}{3}$, b 의 최솟값은 1 이므로 그 합은 $\frac{4}{3}$



4. $-5 \leq x < -1$ 에서 $ax \leq \frac{3x-1}{x+1}$ 이 항상 성립하기 위한 실수 a 의 최솟값은?

- ① -2 ② $-\frac{7}{5}$ ③ -1 ④ $-\frac{4}{5}$ ⑤ $-\frac{2}{5}$

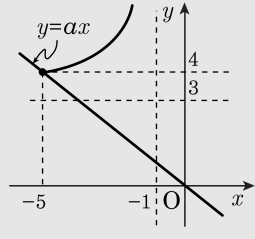
해설

$-5 \leq x < -1$ 에서 직선 $y = ax$ 가

함수 $y = \frac{3x-1}{x+1}$ 의 그래프보다 항상 아래쪽에 있어야 한다.

$$\begin{aligned} y &= \frac{3x-1}{x+1} \\ &= \frac{3(x+1)-4}{x+1} \\ &= \frac{-4}{x+1} + 3 \end{aligned}$$

$y = \frac{3x-1}{x+1}$ 의 그래프가 다음 그림과 같



고,

$x = -5$ 일 때 $y = 4$ 이므로 점 $(-5, 4)$ 를 지난다.

직선 $y = ax$ 가 점 $(-5, 4)$ 를 지날 때,

$$4 = -5a \text{에서 } a = -\frac{4}{5} \text{이다.}$$

따라서 $-5 \leq x < -1$ 에서 $ax \leq \frac{3x-1}{x+1}$ 이 성립하려면

$$a \geq -\frac{4}{5} \text{이어야 하므로}$$

a 의 최솟값은 $-\frac{4}{5}$ 이다.

5. 분수함수 $f(x) = \frac{x+3}{2x-1}$ 에 대하여 합성함수 $y = (f \circ f \circ f)(x)$ 의 그래프는 점 (a, b) 에 대하여 대칭이다. 이 때, $a+b$ 의 값을 구하면?

① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

해설

분수함수 $f(x) = \frac{x+3}{2x-1}$ 에서
$$(f \circ f)(x) = f(f(x)) = \frac{\frac{x+3}{2x-1} + 3}{2 \cdot \frac{x+3}{2x-1} - 1}$$
$$= \frac{x+3+3(2x-1)}{2(x+3)-(2x-1)} = x \text{ 이므로}$$
$$y = (f \circ f \circ f)(x) = f((f \circ f)(x)) = f(x)$$
따라서, $y = f(x)$ 의 점근선은
 $x = \frac{1}{2}, y = \frac{1}{2}$ 이고, 그 그래프는 점근선의
교점 $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ 에 대하여 대칭이므로
 $a = \frac{1}{2}, b = \frac{1}{2}$
 $\therefore a+b=1$

6. 함수 $f(x) = \frac{x+2}{2x-1}$ 에 대하여 $(g \cdot f)(x) = x$ 를 만족하는 함수 $g(x)$ 에 대하여 $g(1)$ 의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$$(g \circ f)(x) = x$$

$$\Rightarrow g(f(x)) = x$$

$$\Rightarrow g\left(\frac{x+2}{2x-1}\right) = x$$

$$\therefore g(1) \text{을 구하려면, } \frac{x+2}{2x-1} = 1 \text{ 이 되어야 한다.}$$

$$\Rightarrow x = 3 \quad \therefore g(1) = 3$$

7. 유리함수 $f(x) = \frac{kx}{x+3}$ 의 그래프가 직선 $y = x$ 에 대하여 대칭일 때, 실수 k 의 값은?

① -5 ② -3 ③ -1 ④ 1 ⑤ 3

해설

$f(x) = \frac{kx}{x+3}$ 가 직선 $y = x$ 에 대해 대칭이므로

$$f(x) = f^{-1}(x), f^{-1}(x) = \frac{-3x}{x-k}$$

$$\frac{kx}{x+3} = \frac{-3x}{x-k}$$

$$\therefore k = -3$$

8. 함수 $f(x) = \frac{x+6}{x+2}$ 의 역함수를 $g(x)$ 라 할 때 곡선 $y = g(x)$ 를 x 축의 방향으로 a 만큼 y 축의 방향으로 b 만큼 평행이동하면 곡선 $y = f(x)$ 와 일치한다고 한다. $a + b$ 의 값은?

① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

해설

$$y = \frac{x+6}{x+2} \text{ 에서 } x = \frac{-2y+6}{y-1} \text{ 이므로}$$

$$g(x) = \frac{-2x+6}{x-1}$$

$$\text{그런데 } f(x) = 1 + \frac{4}{x+2}, \quad g(x) = -2 + \frac{4}{x-1}$$

곡선 $g(x)$ 를 x 축 방향으로 -3 만큼,

y 축 방향으로 3 만큼 평행이동하면

$y = f(x)$ 와 일치하므로

$$a = -3, b = 3$$

$$\therefore a + b = 0$$