1. 함수 $y=\dfrac{2x-4}{x-3}$ 에 관한 설명 중 틀린 것을 고르면?

① 점근선 중 하나는 $x=3$ 이다.

② 점근선 중 하나는 $y=2$ 이다.

③ 함수 $y=\dfrac{2}{x}+2$ 의 그래프를 x 축 방향으로 3만큼 평행이동한 그래프다.

④ 이 그래프는 x축을 지나지 않는다.

⑤ 함수 $y=\dfrac{2}{x-3}$ 의 그래프를 y 축 방향으로 2 만큼 평행이동한 그래프다.

해설

$$y=\frac{2x-4}{x-3}=\frac{2(x-3)+2}{x-3}=\frac{2}{x-3}+2$$

그러므로 함수의 점근선은 $x=3,\ y=2$이고

$y=\dfrac{2}{x}$의 그래프를 x축 방향으로 3만큼,

y축 방향으로 2만큼 평행이동한 그래프이다.

따라서 설명 중 틀린 것은 ④이다.

2. $y = \dfrac{-3}{x+1} + 1$의 그래프에 대한 설명 중 옳지 않은 것은?

① $y = \dfrac{-3}{x}$의 그래프를 x축으로 1, y축으로 1만큼 평행이동한 그래프이다.

② 치역은 $\mathrm{R} - \{1\}$ 이다.

③ $y = \dfrac{-3}{x+1}$의 그래프를 y축으로 1만큼 평행이동한 그래프이다.

④ 점근선은 $x = -1,\ y = 1$ 이다.

⑤ 정의역은 $\mathrm{R} - \{-1\}$ 이다.

해설

$y = \dfrac{-3}{x+1} + 1$의 그래프는 $y = \dfrac{-3}{x}$의 그래프를 x축 방향으로 -1만큼,
y축 방향으로 1만큼 평행이동시킨 그래프이다.
따라서 옳지 않은 것은 ①이다.

3. $2 \le x \le 3$ 에서 부등식 $ax+1 \le \dfrac{x+1}{x-1} \le bx+1$ 이 항상 성립할 때, a 의 최댓값과 b 의 최솟값의 합을 구하면?

① $\dfrac{1}{3}$ ② $\dfrac{2}{3}$ ③ 1 ④ $\dfrac{4}{3}$ ⑤ $\dfrac{5}{3}$

해설

$$y = \frac{x+1}{x-1} = \frac{x-1+2}{x-1} = \frac{2}{x-1} + 1$$

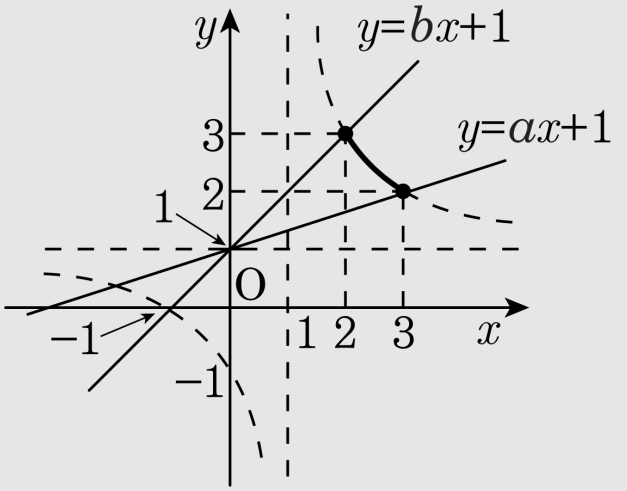
따라서, 분수함수 $y = \dfrac{x+1}{x-1}$ 의 그래프는

$y = \dfrac{2}{x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로

1 만큼, y 축의 방향으로 1 만큼 평행이동한 것이다.

두 직선 $y = ax+1$, $y = bx+1$ 은 a, b 의 값에 관계없이 점 $(0, 1)$ 을 지나는 직선이므로

$2 \le x \le 3$ 에서 $ax+1 \le \dfrac{x+1}{x-1} \le bx+1$ 이 항상 성립하려면 다음 그림에서 $a \le \dfrac{1}{3}$, $b \ge 1$



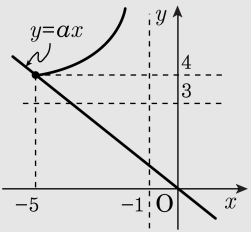
따라서, a 의 최댓값은 $\dfrac{1}{3}$, b 의 최솟값은 1 이므로 그 합은 $\dfrac{4}{3}$

4. $-5 \le x < -1$에서 $ax \le \dfrac{3x-1}{x+1}$이 항상 성립하기 위한 실수 a의 최솟값은?

① -2 ② $-\dfrac{7}{5}$ ③ -1 ④ $-\dfrac{4}{5}$ ⑤ $-\dfrac{2}{5}$

해설

$-5 \le x < -1$에서 직선 $y = ax$가 함수 $y = \dfrac{3x-1}{x+1}$의 그래프보다 항상 아래쪽에 있어야 한다.



$$y = \frac{3x-1}{x+1}$$
$$= \frac{3(x+1)-4}{x+1}$$
$$= \frac{-4}{x+1} + 3$$

$y = \dfrac{3x-1}{x+1}$의 그래프가 다음 그림과 같고,

$x = -5$일 때 $y = 4$이므로 점 $(-5,\ 4)$를 지난다.

직선 $y = ax$가 점$(-5,\ 4)$를 지날 때,

$4 = -5a$에서 $a = -\dfrac{4}{5}$이다.

따라서 $-5 \le x < -1$에서 $ax \le \dfrac{3x-1}{x+1}$이 성립하려면

$a \ge -\dfrac{4}{5}$이어야 하므로

a의 최솟값은 $-\dfrac{4}{5}$이다.

5. 분수함수 $f(x)=\dfrac{x+3}{2x-1}$ 에 대하여 합성함수 $y=(f\circ f\circ f)(x)$ 의 그래프는 점 $(a,\ b)$ 에 대하여 대칭이다. 이 때, $a+b$ 의 값을 구하면?

① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

해설

분수함수 $f(x)=\dfrac{x+3}{2x-1}$ 에서

$$(f\circ f)(x)=f(f(x))=\frac{\dfrac{x+3}{2x-1}+3}{2\cdot\dfrac{x+3}{2x-1}-1}$$

$$=\frac{x+3+3(2x-1)}{2(x+3)-(2x-1)}=x \text{ 이므로}$$

$y=(f\circ f\circ f)(x)=f((f\circ f)(x))=f(x)$

따라서, $y=f(x)$ 의 점근선은

$x=\dfrac{1}{2},\ y=\dfrac{1}{2}$ 이고, 그 그래프는 점근선의

교점 $\left(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{2}\right)$ 에 대하여 대칭이므로

$a=\dfrac{1}{2},\ b=\dfrac{1}{2}$

$\therefore\ a+b=1$

6. 함수 $f(x)=\dfrac{x+2}{2x-1}$ 에 대하여 $(g\cdot f)(x)=x$ 를 만족하는 함수 $g(x)$ 에 대하여 $g(1)$ 의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$(g\circ f)(x)=x$

$\Rightarrow \quad g(f(x))=x$

$\Rightarrow \quad g\left(\dfrac{x+2}{2x-1}\right)=x$

$\therefore \quad g(1)$ 을 구하려면, $\dfrac{x+2}{2x-1}=1$ 이 되어야 한다.

$\Rightarrow \quad x=3 \quad \therefore \quad g(1)=3$

7. 유리함수 $f(x)=\dfrac{kx}{x+3}$의 그래프가 직선 $y=x$에 대하여 대칭일 때, 실수 k의 값은?

① -5 ② -3 ③ -1 ④ 1 ⑤ 3

해설

$f(x)=\dfrac{kx}{x+3}$가 직선 $y=x$에 대해 대칭이므로

$f(x)=f^{-1}(x)$, $f^{-1}(x)=\dfrac{-3x}{x-k}$

$\dfrac{kx}{x+3}=\dfrac{-3x}{x-k}$

$\therefore\ k=-3$

8. 함수 $f(x)=\dfrac{x+6}{x+2}$ 의 역함수를 $g(x)$라 할 때 곡선 $y=g(x)$를 x축의 방향으로 a만큼 y축의 방향으로 b만큼 평행이동하면 곡선 $y=f(x)$와 일치한다고 한다. $a+b$의 값은?

① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

해설

$y=\dfrac{x+6}{x+2}$ 에서 $x=\dfrac{-2y+6}{y-1}$ 이므로

$g(x)=\dfrac{-2x+6}{x-1}$

그런데 $f(x)=1+\dfrac{4}{x+2}$, $g(x)=-2+\dfrac{4}{x-1}$

곡선 $g(x)$를 x축 방향으로 -3만큼,
y축 방향으로 3만큼 평행이동하면
$y=f(x)$와 일치하므로
$a=-3, b=3$
$\therefore a+b=0$