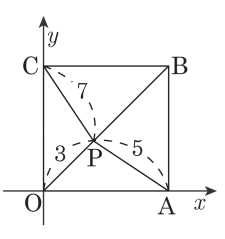
1. 다음 그림과 같이 정사각형 OABC의 내부의 점 P에 대하여 $\overline{\mathrm{OP}} = 3$, $\overline{\mathrm{AP}} = 5$, $\overline{\mathrm{CP}} = 7$일 때 선분 PB의 길이는?



① $2\sqrt{15}$　② $\sqrt{65}$　③ $\sqrt{70}$

④ $5\sqrt{3}$　⑤ $4\sqrt{5}$

해설

정사각형의 한 변의 길이를 a, 점 P의 좌표를 $(x,\ y)$라 하면

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 9 & \cdots ㉠ \\ (a-x)^2 + y^2 = 25 & \cdots ㉡ \\ x^2 + (a-y)^2 = 49 & \cdots ㉢ \end{cases}$$

선분 PB의 길이는

$\overline{\mathrm{PB}} = \sqrt{(a-x)^2 + (a-y)^2}$이다.

㉡+㉢−㉠에서

$(a-x)^2 + (a-y)^2 = 25 + 49 - 9 = 65$

따라서 $\overline{\mathrm{PB}} = \sqrt{65}$

2. 직선 $y=x-1$ 위에 있고 점 $\mathrm{A}(1,\ 0)$, $\mathrm{B}(3,\ 2)$에서 같은 거리에 있는 점 P의 좌표가 $(a,\ b)$일 때, a^2+b^2의 값은?

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

해설

$y = x-1$ 위에 잇는 점 P는 $(\alpha,\ \alpha-1)$로 나타낼 수 있다.

$\overline{\mathrm{AP}}^2=\overline{\mathrm{BP}}^2$이므로

$(\alpha-1)^2+(\alpha-1)^2=(\alpha-3)^2+(\alpha-3)^2,\ \alpha=2$

$\therefore\ \mathrm{P}(2,\ 1)$

$\therefore\ a^2+b^2=5$

3. $\triangle$ABC에서 $\overline{AB} = 8$, $\overline{AC} = x$이고, $\overline{BC}$의 중점을 M이라 할 때, $\overline{BM} = 7$, $\overline{AM} = 1$일 때, x의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $x = 6$

해설

파포스의 정리에 의하여

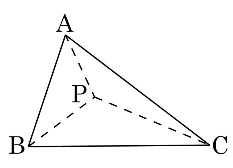
$\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = 2(\overline{AM}^2 + \overline{BM}^2)$이므로

$8^2 + x^2 = 2(7^2 + 1^2)$

$\therefore\ x = \pm 6$

$x > 0$이므로 $x = 6$

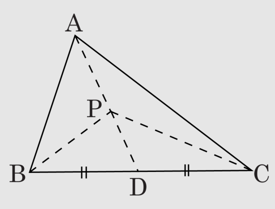
4. 다음 그림과 같이 $\triangle ABC$ 의 내부에 넓이가 삼등분이 되도록 점 P 를 잡았더니 $\overline{AP} = 4$, $\overline{BP} = 3$, $\overline{CP} = 5$ 가 되었다고 한다. 이때, 선분 BC 의 길이는?



① $4\sqrt{3}$ ② $5\sqrt{3}$ ③ $6\sqrt{3}$ ④ $3\sqrt{13}$ ⑤ $2\sqrt{13}$

해설

$\triangle ABC$ 의 내부에 넓이가 삼등분이 되는 점 P 는 삼각형의 무게중심이다.
따라서 $\overline{AP}$ 의 연장선과 $\overline{BC}$ 의 교점을 D 라 하면



$\overline{AP} : \overline{PD} = 2 : 1$

$\therefore \overline{PD} = 2$

$\triangle PBC$ 에서 중선 정리를 이용하면

$\overline{PB}^2 + \overline{PC}^2 = 2\left(\overline{PD}^2 + \overline{BD}^2\right)$

$3^2 + 5^2 = 2\left(2^2 + \overline{BD}^2\right)$

$\overline{BD} = \sqrt{13}$, $\overline{BC} = 2 \cdot \overline{BD} = 2\sqrt{13}$

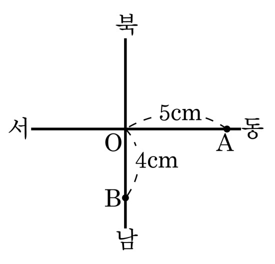
5. 좌표평면 위에 두 점 $\mathrm{A}(a, b)$, $\mathrm{B}(-2,\ 2)$가 있다. 이 0때, $\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{(a+2)^2+(b-2)^2}$의 최솟값은?

① 1　② $\sqrt{2}$　③ 2　④ $2\sqrt{2}$　⑤ 3

해설

원점을 $\mathrm{O}(0,\ 0)$이라 하면
$\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{(a+2)^2+(b-2)^2}$
$=\overline{\mathrm{OA}}+\overline{\mathrm{AB}}$이므로
이 값이 최소가 되는 것은 세 점 O, A, B가 일직선 위에 있을 때이다.
따라서 $\overline{\mathrm{OA}}+\overline{\mathrm{AB}}$의 최소값은
$\overline{\mathrm{OB}}=\sqrt{(-2)^2+2^2}=2\sqrt{2}$

6. 다음의 그림과 같이 수직으로 만나는 도로가 있다. 교차점에서 A는 동쪽으로 5km, B는 남쪽으로 4km의 지점에 있다. A는 시속 4km로 서쪽으로, B는 시속 2km로 북쪽으로 향해서 동시에 출발했을 때, A와 B의 거리가 가장 짧을 때는 몇 시간 후인가?



① 1.4시간 후　　② 1.5시간 후　　③ 1.6시간 후

④ 1.7시간 후　　⑤ 1.8시간 후

해설

남북을 y 축, 동서를 x 축으로 하면 최초의 A, B의 위치의 좌표는 A(5, 0), B(0, -4) 이다. 이 때, t 시간 후의 A, B 의 자표는 A($5-4t$, 0), B(0, $-4+2t$) 로 나타낼 수 있다. 따라서 t 시간 후의 A, B사이의 거리 s 는$s = \sqrt{\{0-(5-4t)\}^2 + (-4+2t-0)^2}$

$= \sqrt{20t^2 - 56t + 41} = \sqrt{20\left(t - \frac{14}{10}\right)^2 + \frac{9}{5}}$

s 는 $t = \frac{14}{10}$ 일 때, 최솟값을 갖는다.

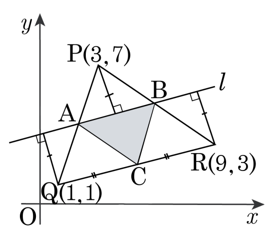
7. 네 점 $A(a,\ 2)$, $B(3,\ 1)$, $C(2,\ -3)$, $D(b,\ -2)$를 꼭짓점으로 하는 □ABCD가 마름모가 되게 하는 실수 a, b에 대하여 $a+b$의 값은? (단, $a>0$)

① 11 ② 12 ③ 13 ④ 14 ⑤ 15

해설

마름모는 평행사변형이므로
$\overline{AC}$의 중점과 $\overline{BD}$의 중점이 일치한다.
즉, $\left(\frac{a+2}{2},\ \frac{2+(-3)}{2}\right)=\left(\frac{3+b}{2},\ \frac{1+(-2)}{2}\right)$에서 $\frac{a+2}{2}=\frac{b+3}{2}$
$\therefore\ a-b=1 \cdots$ ㉠
이 때, 평행사변형이 마름모가 되려면 이웃하는 두 변의 길이가 같아야 한다. 즉, $\overline{AB}=\overline{BC}$이어야 하므로
$\overline{AB}^2=\overline{BC}^2$에서
$(3-a)^2+(1-2)^2=(2-3)^2+(-3-1)^2$
$a^2-6a+10=17$, $a^2-6a-7=0$
$(a-7)(a+1)=0$
$\therefore\ a=7(\because\ a>0)$
이것을 ㉠에 대입하면 $b=6$
$\therefore\ a+b=13$

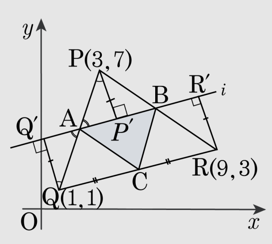
8. 다음 그림과 같이 좌표평면 위의 세 점 P(3,7), Q(1,1), R(9,3)으로부터 같은 거리에 있는 직선 l 이 선분 PQ, PR 과 만나는 점을 각각 A, B라 하자. 선분 QR 의 중점을 C 라 할 때, △ABC 의 무게중심의 좌표를 G(x, y) 라 하면 $x+y$ 의 값은?



① $\frac{16}{3}$ ② 6 ③ $\frac{20}{3}$ ④ $\frac{22}{3}$ ⑤ 8

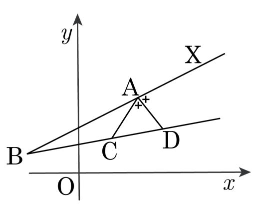
해설

세 점 P, Q, R 에서 직선 l 에 내린 수선의 발을 각각 P′, Q′, R′ 라 하면 △PAP′ ≡ △QAQ′ (∵ ASA 합동) 이므로
점 A 는 선분 PQ 의 중점이다.
마찬가지로 점 B 는 선분 PR 의 중점이다.



따라서, 세 점 A, B, C 는 각각 선분 PQ , 선분 PR , 선분 QR 의 중점이므로 △ABC 의 무게중심은 △PQR 의 무게중심과 일치한다.
△ABC 의 무게중심을 G(x, y) 라 하면
$x=\frac{3+1+9}{3}=\frac{13}{3}$, $y=\frac{7+1+3}{3}=\frac{11}{3}$
따라서, $x+y=\frac{13}{3}+\frac{11}{3}=8$

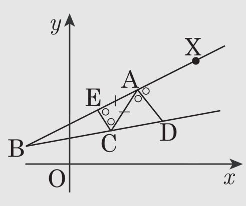
9. 다음 좌표평면에서 세 점 A(7, 6), B(−5, 1), C(3, 3) 을 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC가 있다. 그림과 같이 변 BA의 연장선 위에 한 점 X 를 잡고, ∠XAC의 이등분선이 변 BC 의 연장선과 만나는 교점을 D(x, y) 라 할 때, $x+4y$ 의 값을 구하면?



▶ 답 :

▷ 정답 : 25

해설



그림과 같이 점 C에서 $\overline{AD}$ 와 평행하게 $\overline{CE}$ 를 그리면

$\angle AEC = \angle ACE$ 가 되어 $\overline{CA} = \overline{EA}$ 가 성립한다.

$\overline{BA} : \overline{EA}(\overline{CA}) = \overline{BD} : \overline{CD}$

$\overline{BA} = \sqrt{(7+5)^2+(6-1)^2} = \sqrt{169} = 13$

$\overline{CA} = \sqrt{(7-3)^2+(6-3)^2} = \sqrt{25} = 5$

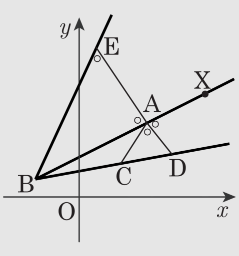
따라서 점 D 는 $\overline{BC}$ 를 13 : 5 로 외분하는 점이다.

$x = \dfrac{13\times3-5\times(-5)}{13-5} = 8,$

$y = \dfrac{13\times3-5\times1}{13-5} = \dfrac{17}{4}$

$\therefore x+4y = 8+4\times\dfrac{17}{4} = 25$

해설



다음 그림과 같이 $\overline{AC}$ 와 평행이 되게 점 B에서 그린 직선과 $\overline{AD}$ 의 연장선과의 교점을 E 라 하면 △ACD 와 △EBD 는 닮음이고, △ABE 는 이등변삼각형이다.

$\overline{DC} : \overline{DB} = \overline{AC} : \overline{EB} = \overline{AC} : \overline{AB}$

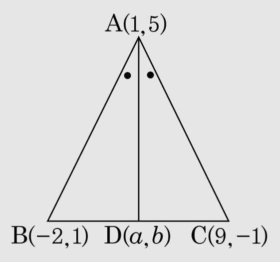
즉, 점 D 는 $\overline{BC}$ 를 $\overline{AB} : \overline{AC}$ 로 외분하는 점이다.

(이하는 위의 해설과 같은 과정이다.)

10. $\triangle ABC$ 의 세 점 ABC 의 좌표를 각각 $(1,\ 5)$, $(-2,\ 1)$, $(9,\ -1)$ 이라 하자. $\angle A$ 의 이등분선이 변 BC와 만나는 점 D의 좌표를 $(a,\ b)$라 할 때, $3(a-b)$ 의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설



$\overline{AB} = \sqrt{3^2+4^2} = 5$, $\overline{AC} = \sqrt{8^2+6^2} = 10$

$\overline{AD}$가 $\angle A$ 의 이등분선이므로

$\overline{AB} : \overline{AC} = \overline{BD} : \overline{CD} = 1 : 2$

따라서 D는 $\overline{BC}$를 1 : 2 로 내분하는 점

$\therefore\ D\left(\frac{9-4}{3},\ \frac{-1+2}{3}\right) = D\left(\frac{5}{3},\ \frac{1}{3}\right)$

$\therefore\ 3(a-b) = 3\left(\frac{5}{3}-\frac{1}{3}\right) = 4$

11. 두 점 $\mathrm{A}(3,0)$, $\mathrm{B}(0,2)$에 대하여 $\overline{\mathrm{PA}}^2 - \overline{\mathrm{PB}}^2 = 5$를 만족하는 점 P의 자취의 방정식은?

① $-3x+2y+9=0$

② $3x+2y=0$

③ $6x-4y+9=0$

④ $-3x+2y=0$

⑤ $-6x+4y-5=0$

해설

구하는 점을 $\mathrm{P}(x,y)$라 하면

$\overline{\mathrm{PA}}^2 - \overline{\mathrm{PB}}^2 = 5$에서

$(x-3)^2+y^2-\{x^2+(y-2)^2\}=5$

정리하면 $-6x+4y=0$

$\therefore -3x+2y=0$

12. 점 A$(3,\ -1)$과 직선 $x+y-3=0$ 위의 점 P를 연결하는 선분의 중점의 자취의 방정식은?

① $x+2y-5=0$　　② $2x-2y+5=0$
③ $2x-y-5=0$　　④ $x+y-5=0$
⑤ $2x+2y-5=0$

해설
$x+y-3=0$ 위의 임의의 한 점을 $P(a,\ -a+3)$ 이라 하고 $\overline{AP}$ 의 중점의 좌표를 $Q(x,\ y)$ 라 하면
$x=\frac{a+3}{2},\quad y=\frac{-a+2}{2}$
$\therefore\ a=2x-3,\quad a=-2y+2$
$\therefore\ 2x-3=-2y+2$
$\therefore\ 2x+2y-5=0$