

1. $x > 2$ 일 때, $x + \frac{1}{x-2}$ 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

$x > 2$ 에서 $x - 2 > 0$ 이므로

산술평균과 기하평균의 관계를 이용하면

$$\begin{aligned}x + \frac{1}{x-2} &= x - 2 + \frac{1}{x-2} + 2 \\&\geq 2\sqrt{(x-2) \times \frac{1}{x-2}} + 2 \\&= 2 + 2 = 4\end{aligned}$$

(단, 등호는 $x = 3$ 일 때 성립)

2. 집합 $A = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots, n\}$ 의 부분집합 중에서 원소 1, 3, 5를 반드시 포함하는 부분집합의 개수가 32 개일 때, 자연수 n 의 값은?

① 8

② 9

③ 10

④ 11

⑤ 12

해설

집합 A 의 원소의 개수가 n 개이므로 원소 1, 3, 5를 반드시 포함하는 부분집합의 개수는 2^{n-3} 개이다.

$$2^{n-3} = 32, 2^{n-3} = 2^5$$

$$n - 3 = 5 \text{ 이므로 } n = 8$$

3. 13 이하의 자연수의 곱을 소인수분해 했을 때 소인수의 합을 a , 소인수의 지수의 합을 b 라 하자. 이때, $a - b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▶ 정답 : 21

해설

$$\begin{aligned} & 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times 13 \\ &= 2 \times 3 \times 2^2 \times 5 \times (2 \times 3) \times 7 \times 2^3 \times 3^2 \\ &\quad \times (2 \times 5) \times 11 \times (2^2 \times 3) \times 13 \\ &= 2^{10} \times 3^5 \times 5^2 \times 7 \times 11 \times 13 \\ &a = 2 + 3 + 5 + 7 + 11 + 13 = 41 \\ &b = 10 + 5 + 2 + 1 + 1 + 1 = 20 \\ &\therefore a - b = 41 - 20 = 21 \end{aligned}$$

4. 다음 중 12 의 배수는?

① 90

② 126

③ 288

④ 352

⑤ 1498

해설

12 의 배수는 4 와 3 의 공배수이다.

5. 집합 S 는 다음 조건을 만족한다고 한다.

- (i) $2 \notin S$, $a \in S$ 이면 $\frac{1}{2-a} \in S$
(ii) 3은 집합 S 의 원소이다.

이때, 집합 S 의 원소 중 정수인 것을 구하여라. (단, 3은 제외)

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

$3 \in S$ 이므로 조건에 대입하면

$\frac{1}{2-3} \in S$ 에서 $-1 \in S$ 이다.

또 $\frac{1}{2-(-1)} = \frac{1}{3} \in S$ 이고,

다시 대입하면 $\frac{1}{2-\frac{1}{3}} = \frac{3}{5} \in S$

또 다시 대입하면 $\frac{1}{2-\frac{3}{5}} = \frac{5}{7} \in S, \dots$

계속하면 $\frac{2n-1}{2n+1}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) 꼴의 수만 나타난다.

6. 다음을 만족하는 집합 A 의 원소가 될 수 없는 것은?

㉠ 모든 원소는 자연수이다.

㉡ $2 \in A, 6 \in A$

㉢ $a + b \in A, a \in A, b \in A$

① 4

② 5

③ 8

④ 10

⑤ 12

해설

$2 \in A, 6 \in A$ 이므로

$2 + 2 = 4 \in A, 2 + 6 = 8 \in A$

$4 + 6 = 10 \in A, 6 + 6 = 12 \in A$

7. 원소의 개수가 3 인 집합 A 가 다음 조건을 만족한다.

$$(가) 5 \in A$$

$$(나) x \in A \text{ 이면 } \frac{1}{1-x} \in A$$

이 때 집합 A 의 모든 원소의 곱은?

① -3

② -2

③ -1

④ 1

⑤ 2

해설

$$5 \in A \text{ 이므로 } \frac{1}{1-5} = -\frac{1}{4} \in A$$

$$\text{또 } \frac{1}{1-\left(-\frac{1}{4}\right)} = \frac{1}{\frac{5}{4}} = \frac{4}{5} \in A$$

$$\frac{1}{1-\frac{4}{5}} = \frac{1}{\frac{1}{5}} = 5 \in A$$

$A = \left\{-\frac{1}{4}, \frac{4}{5}, 5\right\}$ 에서 A 의 모든 원소의 곱은 $-\frac{1}{4} \times \frac{4}{5} \times 5 = -1$ 이다.

8. 자연수로 이루어진 집합 $A = \{2, 4, 6, 8, \dots, 2n\}$ 의 부분집합 중에서 원소 $2(n-1)$ 과, $2n$ 을 포함하지 않은 부분집합의 개수가 32 일 때, n 의 값을 구하면?

① 10

② 14

③ 18

④ 22

⑤ 26

해설

집합 A 의 원소의 개수가 n 개이므로

$$2^{n-2} = 32 = 2^5 \text{ 이다.}$$

$$\therefore n - 2 = 5$$

$$\therefore n = 7$$

원소의 개수가 7 개이므로 $A = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14\}$, $n = 14$ 이다.

9. 집합 $A = \{1, 2, 2^2, 2^3, \dots, 2^n\}$ 의 부분집합 중에서 4의 약수를 모두 포함하는 부분집합의 개수가 64개일 때, n 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

4의 약수 : 1, 2, 4

집합 A 의 원소의 개수는 $n+1$ 개이므로 원소 1, 2, 4를 포함하는 부분집합의 개수는

$$2^{n+1-3} = 64 = 2^6 \text{ 이다.}$$

$$n + 1 - 3 = 6 \quad \therefore n = 8$$

10. 집합 $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ 의 부분집합 중에서 3 또는 7을 원소로 갖는 집합의 개수는?

- ① 16 개 ② 18 개 ③ 20 개 ④ 22 개 ⑤ 24 개

해설

원소 개수가 n 개인 집합의 부분집합 개수 = 2^n

㉠ 집합 A 의 부분집합 개수: $2^5 = 32$

㉡ 3, 7을 모두 원소로 갖지 않는 집합의 개수: $2^3 = 8$

㉢ 3 또는 7을 원소로 갖는 집합의 개수: $2^5 - 2^3 = 24$

11. 집합 $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ 의 부분집합 중에서 적어도 한 개의 홀수를 포함하는 것의 개수를 구하면?

① 32

② 56

③ 64

④ 72

⑤ 120

해설

‘적어도~’문제에서는 반대의 경우의 수를 구하여 모든 경우의 수에서 빼준다.

모든 부분집합의 수 : $2^6 = 128$ 짝수로만 만들 수 있는 부분집합의 수 : $2^3 = 8$

$$\therefore 128 - 8 = 120$$

12. $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 의 부분집합 중 적어도 한 개의 홀수를 원소로 가지는 것의 개수를 구하여라.

▶ 답 : 개

▷ 정답 : 27 개

해설

공집합과 짝수만을 원소로 가지는 부분집합은 제외한다... $2^5 - 2^2 - 1 = 27(\text{개})$

13. 집합 $A = \{1, 2, 3, \dots, 20\}$ 에 대하여 1 또는 2 또는 3을 포함하는 A 의 부분집합의 개수는?

① $7 \cdot 2^{17}$

② $7 \cdot 2^{17} - 1$

③ 2^{17}

④ $2^{17} - 1$

⑤ $2^{17} + 1$

해설

구하는 부분집합은 A 의 부분집합 중에서 1, 2, 3 어느 것도 포함하지 않는 부분집합을 빼면 된다. A 의 부분집합 중 1, 2, 3 어느 것도 포함하지 않는 부분집합은 2^{17} 개다.

$\therefore$ 구하는 부분집합의 개수는 $2^{20} - 2^{17} = 2^{17}(2^3 - 1) = 7 \cdot 2^{17}$

14. 집합 $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 이고, 다음 조건을 만족하는 집합 B 의 갯수를 구하여라.

$$\begin{aligned} B &\subset A \\ 2 &\in B \\ n(B) &= 3 \end{aligned}$$

▶ 답: 개

▷ 정답: 6 개

해설

집합 B 는 원소 2를 반드시 포함하고 원소의 갯수가 3개인 집합 A 의 부분집합이다. 따라서 만족하는 집합 B 를 구하면 $\{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 2, 5\}, \{2, 3, 4\}, \{2, 3, 5\}, \{2, 4, 5\}$ 이고, 총 6개이다.

15. 집합 $U = \{0, 1, \{0, 1\}\}$ 의 부분집합 $A = \emptyset$, $B = \{0\}$, $C = \{1\}$, $D = \{\{0, 1\}\}$ 에 대하여 다음 중 옳은 것을 모두 고르면?

㉠ $\{B \cup C\} \cap \{C\} = A$

㉡ $\{B \cap C\} = A$

㉢ $U - \{B \cup C\} = B \cup C$

㉣ $A \cup B \cup C = D$

① ㉠, ㉡

② ㉠, ㉢

③ ㉠, ㉢, ㉣

④ ㉡, ㉣

⑤ ㉠, ㉡, ㉢, ㉣

해설

㉠ $\{B \cup C\} \cap \{C\} = \{\{0, 1\}\} \cap \{\{1\}\} = \emptyset = A$

㉡ $\{B \cap C\} = \{\emptyset\} \neq \emptyset = A$

㉢ $U - \{B \cup C\} = \{0, 1, \{0, 1\}\} - \{\{0, 1\}\}$
 $= \{0, 1\} = B \cup C$

㉣ $A \cup B \cup C = \emptyset \cup \{0\} \cup \{1\} = \{0, 1\} \neq \{\{0, 1\}\}$

$\therefore$ ㉠, ㉢만 참이다.

16. 전체집합 U 의 세 부분집합 A, B, C 에 대하여 다음 중 옳지 않은 것은?

① $A \cap (A \cup B) = A$

② $(A - B)^c = A^c \cup B$

③ $A \cap (A \cup B)^c = \emptyset$

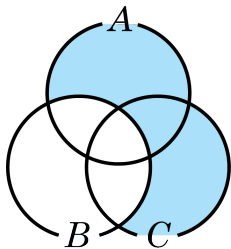
④ $A \cap (A^c \cup B) = A \cup B$

⑤ $(A - B) \cap (A - C) = A - (B \cup C)$

해설

④ $A \cap (A^c \cup B) = (A \cap A^c) \cup (A \cap B) = \emptyset \cup (A \cap B) = A \cap B$

17. 다음 그림에서 색칠한 부분의 집합을 나타낸 것은?



① $(A \cap B) - C$

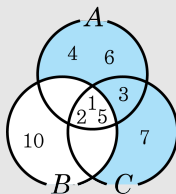
② $(A \cap C) - B$

③ $(A \cup B) - C$

④ $(A \cup C) - B$

⑤ $(B \cup C) - A$

해설



색칠한 부분을 집합으로 나타내면 $(A \cup C) - B$ 이다.

18. 집합 $A = \{1, 2, 3, \dots, n\}$ 의 부분집합 중에서 원소 4, 6 을 반드시 포함하는 부분집합의 개수가 64 개일 때, 자연수 n 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

집합 A 의 원소의 개수가 n 개이므로 원소 4, 6 을 반드시 포함하는 부분집합의 개수는 2^{n-2} (개) 이다.

$$2^{n-2} = 64, \quad 2^{n-2} = 2^6$$

$$n - 2 = 6 \text{ 이므로 } n = 8$$

19. 세 집합 $A = \{x \mid x \text{는 } 20 \text{ 이하의 } 4\text{의 배수}\}$, $B = \{a, \{a, b\}, \{a, b, \emptyset\}\}$, $C = \{\emptyset, \{0, \emptyset\}\}$ 일 때, $n(A) - n(B) - n(C)$ 를 구하면?

① 1

② 2

③ 3

④ 4

⑤ 0

해설

$A = \{x \mid x \text{는 } 20 \text{ 이하의 } 4\text{의 배수}\} = \{4, 8, 12, 16, 20\}$ 이므로 $n(A) = 5$ 이고, $n(B) = 3$, $n(C) = 2$ 이므로 $n(A) - n(B) - n(C) = 0$ 이다.

20. 다음 중 옳지 않은 것은?

① $B = \{0\}$ 이면 $n(B) = 1$ 이다.

② $C = \{x \mid x \text{는 } 10 \text{의 약수}\}$ 이면 $n(C) = 4$ 이다.

③ $D = \{0, 1, 2, 3\}$ 이면 $n(D) = 4$ 이다.

④ $E = \{x \mid x \text{는 } 9 \text{보다 작은 홀수}\}$ 이면 $n(E) = 5$ 이다.

⑤ $n(\emptyset) = 0$ 이다.

해설

④ $E = \{1, 3, 5, 7\}$ 이므로 $n(E) = 4$ 이다.

21. 네 조건 p, q, r, s 에 대하여 다음이 성립한다.

(가) p 는 q 이기 위한 필요충분조건이다.

(나) q 는 r 이기 위한 필요조건이다.

(다) r 는 p 이기 위한 필요조건이다.

(라) s 는 p 이기 위한 충분조건이다.

이때, p 는 r 이기 위한 (㉠) 조건이고, r 는 s 이기 위한 (㉡) 조건이다.

㉠, ㉡에 들어갈 말을 알맞게 나열한 것은?

① 필요, 충분

② 충분, 필요

③ 필요충분, 충분

④ 필요, 필요충분

⑤ 필요충분, 필요

해설

(가) $p \Leftrightarrow q$, (나) $r \Rightarrow q$

(다) $p \Rightarrow r$, (라) $s \Rightarrow p$

따라서, $p \Leftrightarrow r$ 이므로 p 는 r 이기 위한 필요충분조건이고, $s \Rightarrow r$ 이지만 $r \Rightarrow s$ 인지는 알 수 없으므로 r 는 s 이기 위한 필요조건이다.

22. 조건 p 는 조건 q 이기 위한 충분조건이고, 조건 p 는 조건 r 이기 위한 필요조건이다. 이 때, [보기]의 명제 중 반드시 참인 명제를 모두 고르면?

보기

㉠ $p \rightarrow r$

㉡ $\sim q \rightarrow \sim r$

㉢ $r \rightarrow q$

㉣ $\sim r \rightarrow q$

① ㉠

② ㉠, ㉡

③ ㉠, ㉢

④ ㉠, ㉡, ㉢

⑤ ㉡, ㉢

해설

$$p \rightarrow q (T) \leftrightarrow \sim q \rightarrow \sim p (T) \cdots \text{㉠}$$

$$r \rightarrow p (T) \leftrightarrow \sim p \rightarrow \sim r (T) \cdots \text{㉡}$$

$$\text{㉠, ㉡에서 } \sim q \rightarrow \sim r (T) \leftrightarrow r \rightarrow q (T)$$

23. 모든 실수 x, y 에 대하여 $x^2 + 2axy + by^2 \geq 0$ 이 성립하기 위한 실수 a, b 의 조건은?

① $a \leq b^2$

② $b^2 \leq a$

③ $a^2 \leq b$

④ $b \leq a^2$

⑤ $b \leq 4a^2$

해설

$x^2 + 2axy + by^2 \geq 0$ 에서 양변을 y^2 으로 나누면

$$\left(\frac{x}{y}\right)^2 + 2a\left(\frac{x}{y}\right) + b \geq 0$$

모든 실수 x, y 에 대해 성립하려면

$$\frac{D}{4} = a^2 - b \leq 0$$

$$\therefore a^2 \leq b$$

24. 실수 a, b 에 대하여 다음 중 $|a - b| > |a| - |b|$ 가 성립할 필요충분조건인 것은?

① $ab \leq 0$

② $ab \geq 0$

③ $a + b \geq 0$

④ $ab < 0$

⑤ $a - b > 0$

해설

$|a - b| > ||a| - |b||$ 에 대하여

$$(a - b)^2 - (||a| - |b||)^2$$

$$= a^2 - 2ab + b^2 - (a^2 - 2|a||b| + b^2)$$

$$= -2ab + 2|a||b| > 0 \text{ 이려면}$$

a 와 b 가 서로 부호가 반대이어야 한다.

따라서 $ab < 0$

25. $a > 0$ 일 때, $2a + \frac{1}{2a}$ 의 최솟값은?

① 0

② 1

③ 2

④ 3

⑤ 4

해설

$a > 0$ 이므로 $2a > 0$ 산술기하평균의 관계로부터

$$2a + \frac{1}{2a} \geq 2 \cdot \sqrt{2a \cdot \frac{1}{2a}} = 2$$

26. $a > 0, b > 0, c > 0$ 일 때, $\frac{2b}{a} + \frac{2c}{b} + \frac{2a}{c}$ 의 최소값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

산술-기하평균 부등식에 의해,

$$\frac{2b}{a} + \frac{2c}{b} + \frac{2a}{c} \geq 3 \cdot \sqrt[3]{\frac{2b}{a} \times \frac{2c}{b} \times \frac{2a}{c}} = 3 \times 2 = 6$$

$$\therefore \frac{2b}{a} + \frac{2c}{b} + \frac{2a}{c} \geq 6$$

27. 두 집합 $A = \{0, 1, \{\emptyset\}, \{0, 1, \emptyset\}\}$, $B = \{a, b, \{a, b, c\}\}$ 에 대하여 $n(A) - n(B)$ 를 구하면?

① 5

② 4

③ 3

④ 2

⑤ 1

해설

집합 안에 집합이 포함되어 있을 경우 포함된 집합을 하나의 원소로 여기어 원소의 개수를 센다.

$n(A) = 4, n(B) = 3$ 이므로 $n(A) - n(B) = 1$ 이다.