

1. 집합 $X = \{a, b, c\}$ 에 대하여 X 에서 X 로의 함수 중 일대일대응이 아닌 함수의 개수를 구하여라.

▶ 답 : 개

▷ 정답 : 21개

해설

X 에서 X 로의 함수의 총 개수에서
 X 에서 X 로의 일대일대응의 개수를
제외하면 된다.
 X 에서 X 로의 함수의 총 개수 : $3^3 = 27$
 X 에서 X 로의 일대일대응의 개수
: $3 \times 2 \times 1 = 6(\text{개})$
 $\therefore 27 - 6 = 21(\text{개})$

2. 두 함수 $f(x) = ax + b$, $g(x) = 3x - 2$ 에 대하여 $(f \circ g)(1) = 2$, $(g \circ f)(2) = 3$ 을 만족하는 상수 a , b 의 합 $4a + b$ 를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$(f \circ g)(1) = 2$ 에서

$(f \circ g)(1) = f(g(1)) = f(1) = a + b$

$\therefore a + b = 2$

3. 실수 전체의 집합 R 에서 R 로의 함수 $f(x) = |x-2| + kx - 5$ 의 역함수가 존재할 때, 상수 k 의 범위는 무엇인가?

① $k < -1$

② $-1 < k < 1$

③ $k < 1$

④ $k < -1$ 또는 $k > 1$

⑤ $k > 1$

해설

$$x \geq 2 \text{ 일 때, } f(x) = (k+1)x - 7$$

$$x < 2 \text{ 일 때, } f(x) = (k-1)x - 3$$

그런데 $f(x)$ 의 역함수가 존재하므로 $f(x)$ 는 일대일대응이다.

따라서, $(k+1)(k-1) > 0$ 이므로

$$k < -1 \text{ 또는 } k > 1$$

4. 함수 $y = (x - 2)^2 - 1 (x \leq 2)$ 의 역함수를 구하면?

① $y = \sqrt{x - 1} + 2 (x \geq 1)$

② $y = \sqrt{x + 1} + 2 (x \geq -1)$

③ $y = -\sqrt{x + 1} + 2 (x \geq -1)$

④ $y = -\sqrt{x + 1} - 2 (x \geq -1)$

⑤ $y = -\sqrt{x - 1} + 2 (x \geq 1)$

해설

$$y = (x - 2)^2 - 1 \quad (x \leq 2, y \geq -1)$$

$$\text{역함수 } x = (y - 2)^2 - 1 \quad (y \leq 2, x \geq -1)$$

$$x + 1 = (y - 2)^2$$

$$y = 2 \pm \sqrt{x + 1}$$

$$y \leq 2 \text{ 이므로, } y = -\sqrt{x + 1} + 2$$

$$\therefore y = -\sqrt{x + 1} + 2 \quad (x \geq -1)$$

5. 두 함수 $f(x) = -2x+3$, $g(x) = 3x+1$ 에 대하여 $(g \circ (f \circ g)^{-1} \circ f^{-1})(5)$ 의 값을 구하시오.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$$\begin{aligned} & (g \circ (f \circ g)^{-1} \circ f^{-1})(5) \\ &= (g \circ (g^{-1} \circ f^{-1}) \circ f^{-1})(5) \\ &= (g \circ g^{-1}) \circ (f^{-1} \circ f^{-1})(5) \\ &= (f^{-1} \circ f^{-1})(5) \\ &= f^{-1} \circ (f^{-1}(5)) \\ f^{-1}(5) &= k \text{ 로 놓으면 } f(k) = -2k + 3 = 5 \\ \therefore k &= -1 \\ \therefore (\text{준식}) &= f^{-1}(f^{-1}(5)) = f^{-1}(k) = f^{-1}(-1) \\ f^{-1}(-1) &= l \text{ 로 놓으면} \\ f(l) &= -2l + 3 = -1 \\ \therefore l &= 2 \\ \therefore (\text{준식}) &= f^{-1}(-1) = l = 2 \end{aligned}$$

6. 삼차함수 $f(x) = ax^3 + b$ 의 역함수 f^{-1} 가 $f^{-1}(5) = 2$ 를 만족시킬 때, $8a + b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

역함수의 성질에서 $f(a) = b \Leftrightarrow f^{-1}(b) = a$

즉 $f^{-1}(5) = 2 \Rightarrow f(2) = 5$ 이다.

따라서, $f(x) = ax^3 + b$ 에서

$\therefore f(2) = 8a + b = 5$

7. 함수 $y = |2x - 4| - 4$ 의 그래프와 x 축으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

절대값 기호 안을 0으로 하는 x 의 값은

$2x - 4 = 0$ 에서 $x = 2$

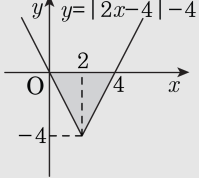
(i) $x < 2$ 일 때, $y = -(2x - 4) - 4 = -2x$

(ii) $x \geq 2$ 일 때, $y = (2x - 4) - 4 = 2x - 8$

따라서 (i), (ii)에 의하여

함수 $y = |2x - 4| - 4$ 의 그래프는 그림과 같으므로

구하는 도형의 넓이는 $\frac{1}{2} \times 4 \times 4 = 8$



8. 임의의 실수 x 에 대하여 $f(-x) = f(x)$ 이면 $f(x)$ 를 우함수, $f(-x) = -f(x)$ 이면 $f(x)$ 를 기함수라 한다. 다음은 「모든 함수는 우함수와 기함수의 합으로 나타낼 수 있다.」라는 명제의 참·거짓을 밝히는 과정이다. 다음 증명 과정에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것을 차례로 나열하면?

보기

임의의 함수 $f(x)$ 에 대하여 $f(x) = \frac{f(x)+f(-x)}{2} + \frac{f(x)-f(-x)}{2}$ 라고 놓고 $g(x) = \frac{f(x)+f(-x)}{2}$, $h(x) = \frac{f(x)-f(-x)}{2}$ 라 하면 $g(x)$ 는 [(가)] 이고 $h(x)$ 는 [(나)] 이다. 따라서 주어진 명제는 [(다)]이다.

- ① 기함수, 우함수, 참 ② 우함수, 기함수, 참
③ 우함수, 우함수, 거짓 ④ 기함수, 기함수, 거짓
⑤ 우함수, 기함수, 거짓

해설

$$g(-x) = \frac{f(-x)+f(x)}{2} = g(x) \text{ 이므로}$$

$g(x)$ 는 우함수 ... (가)

$$h(-x) = \frac{f(-x)-f(x)}{2} = -\frac{f(x)-f(-x)}{2} = -h(x) \text{ 이므로}$$

$h(x)$ 는 기함수 ... (나)

따라서, 임의의 함수 $f(x)$ 를
우함수와 기함수의 합으로 나타내었으므로
주어진 명제는 참이다. ... (다)

9. 분수식 $\frac{x^2}{(x-y)(x-z)} + \frac{y^2}{(y-x)(y-z)} + \frac{z^2}{(z-x)(z-y)}$ 를 간단히 하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$$\frac{x^2(z-y) + y^2(z-x) + z^2(y-x)}{(x-y)(y-z)(z-x)} \dots \textcircled{1}$$

①에서 분자를 x 에 관하여 정리하면

$$x^2(z-y) + y^2(z-x) + z^2(y-x)$$

$$= (z-y)x^2 - (z^2 - y^2)x + yz^2 - y^2z$$

$$= (z-y)x^2 - (z+y)(z-y)x + zy(z-y)$$

$$= (z-y) \{ x^2 - (z+y)x + zy \}$$

$$= (z-y)(x-z)(x-y) = (x-y)(y-z)(z-x)$$

$$\therefore \text{(준식)} = \frac{(x-y)(y-z)(z-x)}{(x-y)(y-z)(z-x)} = 1$$

10. 등식 $\frac{x^2+1}{x^3-6x^2+11x-6} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x-2} + \frac{c}{x-3}$ 이 x 에 대한 항등식 이 되도록 상수 a, b, c 에 대하여 abc 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -25

해설

$x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = (x-1)(x-2)(x-3)$ 이므로

양변에 $(x-1)(x-2)(x-3)$ 을 곱하면

$x^2 + 1 = a(x-2)(x-3) + b(x-1)(x-3) + c(x-1)(x-2)$

양변에 $x = 1$ 을 대입하면 $2 = 2a$

$\therefore a = 1$

양변에 $x = 2$ 를 대입하면 $5 = -b$

$\therefore b = -5$

양변에 $x = 3$ 을 대입하면 $10 = 2c$

$\therefore c = 5$

$\therefore abc = -25$

11. $2x - y$ 의 $x + y$ 에 대한 비가 $\frac{2}{3}$ 일 때, x 의 y 에 대한 비는?

- ① $\frac{1}{5}$ ② $\frac{4}{5}$ ③ 11 ④ $\frac{6}{5}$ ⑤ $\frac{5}{4}$

해설

$$\frac{2x - y}{x + y} = \frac{2}{3}, 3(2x - y) = 2(x + y), 4x = 5y$$

$$\therefore \frac{x}{y} = \frac{5}{4}$$

12. x, y, z 가 양의 실수이고, $\frac{x(y+z)}{15} = \frac{y(z+x)}{13} = \frac{z(x+y)}{18}$ 일 때,
 $x:y:z$ 를 구하면?

① $1:2:4$

② $3:4:5$

③ $5:4:8$

④ $4:7:9$

⑤ $4:7:5$

해설

$$\frac{x(y+z)}{15} = \frac{y(z+x)}{13} = \frac{z(x+y)}{18} = k$$

$$xy + xz = 15k, yz + yx = 13k, zx + zy = 18k$$

$$\text{변변끼리의 합은 } 2(xy + yz + zx) = 46k$$

$$\therefore xy + yz + zx = 23k$$

$$yz = 8k, zx = 10k, xy = 5k$$

$$\text{변변끼리 곱하면 } (xyz)^2 = 400k^3, \quad xyz > 0$$

$$\therefore xyz = 20k\sqrt{k}$$

$$x = \frac{5}{2}\sqrt{k}, y = 2\sqrt{k}, z = 4\sqrt{k}$$

$$\therefore x:y:z = 5:4:8$$

13. 유리함수 $y = \frac{4x+3}{x+2}$ 의 그래프는 함수 $y = \frac{a}{x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 b 만큼, y 축의 방향으로 c 만큼 평행 이동한 것이다. 이 때 $a+b+c$ 의 값은?

① -4 ② -3 ③ -2 ④ -1 ⑤ 0

해설

$$y = \frac{4x+3}{x+2} = \frac{4(x+2)-5}{x+2} = 4 + \frac{-5}{x+2} \text{ 이므로}$$

$$y = \frac{-5}{x} \text{ 의 그래프를 } x \text{ 축 방향으로 } -2,$$

y 축 방향으로 4만큼 평행이동한 것이므로

$$a+b+c = (-5) + (-2) + 4 = -3$$

14. 분수함수 $y = \frac{x-1}{x-2}$ 의 그래프에 대한 설명 중 옳은 것을 모두 고르면?

- ㉠ 제 1, 3 사분면만을 지난다.

㉡ 두 점근선의 교점은 (2, 1)이다.

㉢ 두 직선 $y = -x + 3$, $y = x - 1$ 에 대해 대칭인 곡선이다.

- ① ㉡

② ㉠, ㉡

③ ㉠, ㉢

④ ㉡, ㉢

⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

㉠ 다음 그림의 개형을 가지므로 제 1, 2, 4 사분면을 지난다.

㉡ 점근선이 $x = 2$, $y = 1$ 이므로 교점은 (2, 1)

㉢ 주어진 분수함수가 $y = \frac{1}{x}$ 을 x 축으로 2, y 축으로 1만큼 평행이동 시킨 것이므로 대칭되는 직선은 기울기가 ± 1 이고 (2, 1)을 지나는 직선이다.
 $\Rightarrow y = x - 1, y = -x + 3$

15. 무리식 $\sqrt{2x+5} + \sqrt{15-3x}$ 가 실수값을 갖도록 하는 정수 x 의 개수는?

- ① 6개 ② 7개 ③ 8개 ④ 9개 ⑤ 10개

해설

$$2x + 5 \geq 0, 2x \geq -5 \quad \therefore x \geq -2.5$$

$$15 - 3x \geq 0, 15 \geq 3x \quad \therefore 5 \geq x$$

$$\therefore -2.5 \leq x \leq 5$$

$$-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5 \text{ 총 8개}$$

16. $\frac{\sqrt{x+3}}{\sqrt{x-2}} = -\sqrt{\frac{x+3}{x-2}}$ 일 때, 방정식 $|x-3| - |x+2| = -1$ 의 해를 구하면?

① -1 ② 0 ③ 1 ④ 5 ⑤ 6

해설

$$\begin{aligned}x+3 &\geq 0, \quad x-2 < 0 \rightarrow -3 \leq x < 2 \\-(x-3) - (x+2) &= -2x+3-2 = -1 \\\therefore x &= 1\end{aligned}$$

17. $f(x) = \sqrt{x} + \sqrt{x+1}$ 일 때, $\frac{1}{f(1)} + \frac{1}{f(2)} + \cdots + \frac{1}{f(99)}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 9

해설

$f(x) = \sqrt{x} + \sqrt{x+1}$ 이므로

$$\frac{1}{f(x)} = \sqrt{x+1} - \sqrt{x}$$

$$\begin{aligned} \therefore (\text{준 식}) &= (\sqrt{2} - 1) + (\sqrt{3} - \sqrt{2}) + \\ &\quad (\sqrt{4} - \sqrt{3}) + \cdots + (\sqrt{100} - \sqrt{99}) \\ &= \sqrt{100} - 1 = 10 - 1 = 9 \end{aligned}$$

18. $x = \frac{1}{\sqrt{5} + 2\sqrt{6}}, y = \frac{1}{\sqrt{5} - 2\sqrt{6}}$ 일 때, $x^2 + xy + y^2$ 의 값은?

▶ 답 :

▷ 정답 : 11

해설

$$x = \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{2}} = \sqrt{3} - \sqrt{2}$$

$$y = \frac{1}{\sqrt{3} - \sqrt{2}} = \sqrt{3} + \sqrt{2}$$

$$x + y = 2\sqrt{3}, xy = 1$$

$$x^2 + xy + y^2 = (x + y)^2 - xy = 12 - 1 = 11$$

19. $y = -\sqrt{4-2x} + 1$ 의 그래프에 대한 다음 설명 중 옳지 않은 것은?

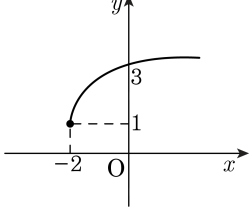
- ① 정의역은 $\{x \mid x \leq 2\}$ 이다.
- ② 치역은 $\{y \mid y \leq 1\}$ 이다.
- ③ 평행이동하면 $y = -\sqrt{2x}$ 와 겹쳐진다.
- ④ 그래프는 제 2사분면을 지나지 않는다.
- ⑤ 이 그래프는 x 축과 점 $\left(\frac{3}{2}, 0\right)$ 에서 만난다.

해설

- ③ 평행이동하면 $y = -\sqrt{-2x}$ 와 겹쳐진다.
- ④, ⑤ 꼭지점이 $(2, 1)$ 이고 $\left(\frac{3}{2}, 0\right)$ 을 지난다.

$\therefore 1, 3, 4$, 분면을 지난다.

20. 무리함수 $y = \sqrt{ax+b}+c$ 의 그래프가 다음 그림과 같을 때, $a+b+c$ 의 값을 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : 7

해설

주어진 그래프는 $y = \sqrt{ax}$ 의 그래프를 x 축으로 -2 만큼, y 축으로 1 만큼 평행이동한 것과 같으므로 $y = \sqrt{a(x+2)} + 1$ 또, 점 $(0, 3)$ 을 지나므로
 $3 = \sqrt{2a} + 1, \sqrt{2a} = 2$
 $\therefore a = 2$
따라서 $y = \sqrt{2(x+2)} + 1 = \sqrt{2x+4} + 1$ 이고,
이것이 $y = \sqrt{ax+b}+c$ 와 일치하므로
 $a = 2, b = 4, c = 1$
 $\therefore a + b + c = 7$

21. $8 \leq x \leq a$ 에서 함수 $y = -\sqrt{x+1} + 3$ 의 최댓값이 b , 최솟값이 -1 일 때, $a + b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 15

해설

$y = -\sqrt{x+1} + 3$ 의 그래프는 $y = -\sqrt{x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 -1 만큼, y 축의 방향으로 3 만큼 평행이동한 것이므로 x 의 값이 증가할 때, y 의 값은 감소한다.

$x = a$ 일 때 최솟값을 가지므로

$$-1 = -\sqrt{a+1} + 3 \quad \therefore a = 15$$

$x = 8$ 일 때 최댓값을 가지므로

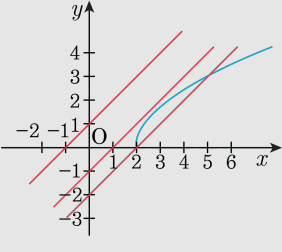
$$b = -\sqrt{8+1} + 3 = 0$$

$$\therefore a + b = 15 + 0 = 15$$

22. 곡선 $y = \sqrt{4x-8}$ 과 직선 $y = x+k$ 가 한 점에서 만나기 위한 k 의 값의 범위는?
- ① $k = -2$ 또는 $k > 1$ ② $k = -1$ 또는 $k < -2$
- ③ $k = 1$ 또는 $k > 2$ ④ $k = 2$ 또는 $k < -1$
- ⑤ $k = -1$

해설

그래프에서 보듯이 한 점에서 만나는 경우는 접하는 경우이거나 $k < -2$ 인 경우이다.



접하는 경우는 $\sqrt{4x-8} = x+k$ 에서
 $4x-8 = x^2+2kx+k^2$
 $x^2+2(k-2)x+k^2+8=0$
 $\frac{D}{4} = (k-2)^2 - (k^2+8) = -4k-4=0$ 에서 $k=-1$
따라서 $k=-1$ 또는 $k<-2$

23. $x > 2$ 에서 정의된 두 함수 $f(x)$, $g(x)$ 가 $f(x) = \sqrt{x-2} + 2$, $g(x) = \frac{1}{x-2} + 2$ 일 때 $(f \cdot g)(3) + (g \cdot f)(3)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

$$\begin{aligned}(f \cdot g)(3) &= f(g(3)) = f(3) = 3 \\(g \cdot f)(3) &= g(f(3)) = g(3) = 3 \\ \therefore (f \cdot g)(3) + (g \cdot f)(3) &= 6\end{aligned}$$

24. 함수 $y = \sqrt{x-3}$ 의 역함수를 구하면?

① $y = x^2 + 3$

② $y = \sqrt{x+3}$

③ $y = x^2 - 3$

④ $y = x^2 - 3 \ (x \leq 1)$

⑤ $y = x^2 + 3 \ (x \geq 0)$

해설

$y = \sqrt{x-3}$ 의 정의역과 치역은
각각 $x \geq 3$, $y \geq 0$ 이고 양변을 제곱하면
 $y^2 = x-3$, $x = y^2 + 3$
 $\therefore y = x^2 + 3 \ (x \geq 0, y \geq 3)$

25. 자연수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(n) = \begin{cases} n-1 & (n \geq 100 \text{일 때}) \\ f(f(n+2)) & (n < 100 \text{일 때}) \end{cases}$ 에서 $f(98)$ 의 값을 구하면?
- ① 80 ② 85 ③ 95 ④ 99 ⑤ 102

해설

자연수 n 에 대하여

$$f(n) = \begin{cases} n-1 & (n \geq 100 \text{일 때}) \\ f(f(n+2)) & (n < 100 \text{일 때}) \end{cases} \text{이므로}$$
$$\begin{aligned} f(98) &= f(f(100)) = f(99) = f(f(101)) \\ &= f(100) = 99 \end{aligned}$$

26. 자연수 n 을 $n = 2^p \cdot k$ (p 는 음이 아닌 정수, k 는 홀수)로 나타냈을 때, $f(n) = p$ 라 하자. 예를 들면, $f(12) = 2$ 이다. 다음 중 옳은 것을 모두 고르면?

- ㉠ n 이 홀수이면, $f(n) = 0$ 이다.

㉡ $f(8) < f(24)$ 이다.

㉢ $f(n) = 3$ 인 자연수 n 은 무한히 많다.

① ㉠ ② ㉡ ③ ㉠, ㉡ ④ ㉠, ㉢ ⑤ ㉡, ㉢

해설

$n = 2^p \cdot k$ 에서
㉠ n 이 홀수이면, k 가 홀수이므로 2^p 이 홀수
 $\therefore p = 0$
즉 $f(n) = 0$
㉡ $f(8) = f(2^3 \cdot 1) = 3$, $f(24) = f(2^3 \cdot 3) = 3$
 $\therefore f(8) = f(24)$
㉢ $f(n) = 3$ 에서 $n = 2^3 \cdot k$
홀수 k 는 무한집합이므로 무한히 많다.

27. R 가 실수 전체의 집합일 때, R 에서 R 로의 함수 f 를 다음과 같이 정의한다.

$f : x \rightarrow a|x-1| + (2-a)x + a \quad (x \in R, a \in R)$

함

수 f 가 일대일 대응이 되도록 하는 a 의 값의 범위는?

- ① $a < -1$
- ② $a \leq -1$
- ③ $a > -1$
- ④ $a < 1$
- ⑤ $a \leq 1$

해설

$f(x) = a|x-1| + (2-a)x + a$ 에서 $x \geq 1, x < 1$ 인 경우로 나누면,
 $x \geq 1$ 일 때, $f(x) = a(x-1) + (2-a)x + a$
 $x < 1$ 일 때, $f(x) = a(1-x) + (2-a)x + a$

$$\therefore f(x) = \begin{cases} 2x & (x \geq 1) \\ -2(a-1)x + 2a & (x < 1) \end{cases}$$

함수 $f(x)$ 가 R 에서 R 로의 일대일 대응이려면
 $x \geq 1$ 에서 기울기가 양이므로 $x < 1$ 에서도 기울기가 양이어야 한다.

$$\text{즉, } -2(a-1) > 0, a-1 < 0$$

$$\therefore a < 1$$

28. 두 집합 $X = \{-1, 0, 1\}$, $Y = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ 에 대하여 X 에서 Y 로 함수 중 다음 조건을 모두 만족시키는 함수 f 의 개수는 몇 개인가?

X 의 임의의 두 원소 x_1, x_2 에 대하여
Ⅰ. $f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)$
Ⅱ. $f(x_1) = f(x_2)$ 이면 $x_1 = x_2$

- ① 2 개 ② 4 개 ③ 6 개 ④ 8 개 ⑤ 12 개

해설

조건 Ⅰ에서, $x_1 = 0, x_2 = 0$ 이면
 $f(0) = f(0) + f(0)$ 에서 $f(0) = 0$
 $x_1 = 1, x_2 = -1$ 이면
 $f(0) = f(1) + f(-1)$ 에서, $f(-1) = -f(1)$
이때, 조건 Ⅱ에 의해
 $f(1) \neq 0, f(-1) \neq 0$
따라서, 두 조건을 만족시키는
함수 f 의 개수는 0이 대응할 수 있는
원소는 0의 1가지,
1이 대응할 수 있는 원소는
-2, -1, 1, 2의 4가지,
-1이 대응할 수 있는 원소는 $-f(1)$ 의 1가지,
따라서, $1 \times 4 \times 1 = 4$ (개)

29. 함수 $f(x) = x - 1$ 에 대하여 $(f \circ f \circ \cdots \circ f)(a) = 1$ 을 만족하는 상수 a 의 값은? (단, 밑줄 그은 부분의 f 의 갯수는 10개)

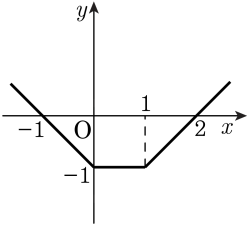
- ① -10
- ② -5
- ③ 1
- ④ 5
- ⑤ 11

해설

$f(x) = x - 1$
 $(f \circ f)(x) = f(f(x)) = f(x - 1) = (x - 1) - 1 = x - 2$
 $(f \circ f \circ f)(x) = f(f(f(x))) = f(x - 2) = (x - 2) - 1 = x - 3$
 $\vdots$
 $(f \circ f \circ \cdots \circ f)(x) = x - 10$
밑줄 그은 부분은 10개.
따라서, $a - 10 = 1$ 에서 $a = 11$

30. 다음 그림은 $y = f(x)$ 의 그래프이다. 이때, $y = f(x)$ 와 $y = |f(x)|$ 의 그래프로 둘러싸인 부분의 넓이는?

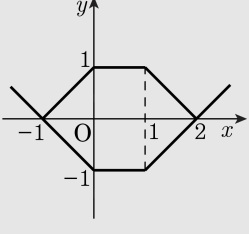
- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5



해설

$y = |f(x)|$ 의 그래프는 $y = f(x)$ 의 그래프에서 x 축의 위부분은 그대로 두고 x 축의 아래부분을 x 축에 대하여 대칭이동하면 된다. 따라서, 두 그래프로 둘러싸인 부분은 다음 그림과 같으므로 그 넓이는

$$2 \left(\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 \right) = 4$$



31. 함수 $f(x) = |x-1| + |x-2| + |x-a|$ 가 $x=a$ 에서 최솟값을 가질 때, $f(0) + f(3)$ 의 값은?

① 9

② -9

③ $2a$

④ $2a-3$

⑤ $-2a+3$

해설

절댓값 기호가 홀수 개 있을 때, 절댓값 기호 안의 값이 0 이 되게 하는 x 의 값 중 가운데 값에서 최솟값을 가지므로 $x=a$ 에서 $f(x)$ 가 최솟값을 가지려면 $1 \leq a \leq 2$ 이어야 한다.

$$\text{이 때, } f(0) = |-1| + |-2| + |-a| = 3 + a$$

$$f(3) = |2| + |1| + |3-a| = 6 - a$$

$$\therefore f(0) + f(3) = 3 + a + 6 - a = 9$$

32. 다항함수 $f(x) = \frac{x-a}{(a-b)(a-c)} + \frac{x-b}{(b-c)(b-a)} + \frac{x-c}{(c-a)(c-b)}$ 일 때, $f(2013)$ 의 값은?
- ① $a+b+c$ ② $a^2+b^2+c^2$ ③ $a^3+b^3+c^3$
④ $ab+bc+ca$ ⑤ 0

해설

주어진 식을 통분하면
(분자)
 $= \{(x-a)(b-c) + (x-b)(c-a) + (x-c)(a-b)\}$
 $= (b-c+c-a+a-b)x$
 $+ (-ab+ac-bc+ab-ca+cb) = 0$
 $\therefore f(x) = 0 \quad \therefore f(2013) = 0$

해설

주어진 식의 분모는 0이 아니므로
 a, b, c 는 서로 다른 수이고
 $f(a) = \frac{a-b}{(b-c)(b-a)} + \frac{a-c}{(c-a)(c-b)}$
 $= \frac{-1}{b-c} + \frac{1}{b-c} = 0$
 $f(b) = \frac{b-a}{(a-b)(a-c)} + \frac{b-c}{(c-a)(c-b)}$
 $= \frac{-1}{a-c} + \frac{1}{a-c} = 0$
그런데 $f(x)$ 는 일차이하의 함수이고
 $f(a) = f(b) = 0$ 이므로
모든 실수 x 에 대하여 $f(x) = 0$ 이다.
 $\therefore f(2013) = 0$

33. 분수식 $\frac{x-1}{x+1} + \frac{x+1}{x-1} - \frac{x^2+1}{x^2+x}$ 를 간단히 하면?

① $\frac{x^2+1}{x(x+1)}$

③ $\frac{x^2+2}{x(x+1)}$

⑤ $\frac{x^2+1}{x(x+1)(x+1)}$

② $\frac{x^2+2}{x(x-1)}$

④ $\frac{x^2+1}{x(x-1)}$

해설

$$\begin{aligned} & \frac{x-1}{x+1} + \frac{x+1}{x-1} - \frac{x^2+1}{x^2+x} \\ &= \frac{(x-1)^2 + (x+1)^2}{(x+1)(x-1)} - \frac{x^2+1}{x^2+x} \\ &= \frac{2x^2+2}{(x+1)(x-1)} - \frac{x^2+1}{x^2+x} \\ &= \frac{(2x^2+2)x - (x-1)(x^2+1)}{x(x+1)(x-1)} \\ &= \frac{(x^2+1)(2x-x+1)}{x(x+1)(x-1)} \\ &= \frac{(x^2+1)(x+1)}{x(x+1)(x-1)} \\ &= \frac{x^2+1}{x(x-1)} \end{aligned}$$

34. $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{99 \cdot 100} = \frac{a}{100}, \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \cdots + \frac{1}{99 \cdot 101} = \frac{b}{101}$ 일 때, $a + b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 149

해설

$$\begin{aligned} & \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{99 \cdot 100} \\ &= \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{98} - \frac{1}{99}\right) + \\ & \quad \left(\frac{1}{99} - \frac{1}{100}\right) = 1 - \frac{1}{100} \\ &= \frac{99}{100} = \frac{a}{100} \\ &\therefore a = 99 \\ & \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \cdots + \frac{1}{99 \cdot 101} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{97} - \frac{1}{99}\right) + \\ & \quad \left(\frac{1}{99} - \frac{1}{101}\right) \\ &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{101}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{100}{101} = \frac{50}{101} = \frac{b}{101} \\ &\therefore b = 50 \\ &\therefore a + b = 149 \end{aligned}$$

35. 어느 회사원의 연간 소득은 Y 원이다. 이 소득의 $a\%$ 에 대해서는 세금이 부과되지 않고, 그 나머지 소득에 대해서만 $b\%$ 의 세금이 부과된다. 이 사람은 세금을 납부하고 난 후의 소득 중 C 원을 소비하고 나머지는 모두 저축한다. 이 사람의 연간 저축액 S 원은?

① $S = \left(1 - \frac{a}{100} - \frac{b}{100}\right)Y - C$

② $S = \left(1 - \frac{a}{100} - \frac{b}{100}\right)Y + C$

③ $S = \left(1 - \frac{a}{100} \cdot \frac{b}{100} + \frac{b}{100}\right)Y - C$

④ $S = \left(1 + \frac{a}{100} \cdot \frac{b}{100} - \frac{b}{100}\right)Y + C$

⑤ $S = \left(1 + \frac{a}{100} \cdot \frac{b}{100} - \frac{b}{100}\right)Y - C$

해설

비과세 소득은 $Y \times \frac{a}{100}$ 원이고 나머지 금액 $Y \left(1 - \frac{a}{100}\right)$ 에 대한 $b\%$ 의 세금을 납부하고 C 원을 소비한 후 저축하므로

$$S = Y \times \frac{a}{100} + Y \left(1 - \frac{a}{100}\right) \left(1 - \frac{b}{100}\right) - C$$

$$= \left(1 + \frac{a}{100} \cdot \frac{b}{100} - \frac{b}{100}\right)Y - C$$

36. 무리수 $\sqrt{k}$ 의 정수 부분을 a , 소수 부분을 b 라 할 때, $a^3 + b^3 = 9ab$ 을 만족하는 양의 정수 k 를 구하면?

① 6 ② 4 ③ 2 ④ 1 ⑤ 11

해설

$\sqrt{k} = a + b \quad \therefore b = \sqrt{k} - a$
 $a^3 + b^3 = 9ab, \quad a^3 + (\sqrt{k} - a)^3 = 9a(\sqrt{k} - a)$
 $\therefore 3a(3a - k) + \sqrt{k}(3a^2 - 9a + k) = 0$
 a, k 가 정수이므로
 $3a(3a - k) = 0, \quad 3a^2 - 9a + k = 0$
연립하여 풀면
 $\therefore a = 2, \quad k = 6$

37. $x = \frac{2a}{1+a^2}$ ($a > 1$) 일 때, $P = \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}}$ 의 값을 구하면?

① a

② $a+1$

③ $a-1$

④ a^2

⑤ $\frac{1}{a}$

해설

$$\begin{aligned}\sqrt{1+x} &= \sqrt{1 + \frac{2a}{1+a^2}} \\ &= \sqrt{\frac{1+2a+a^2}{1+a^2}} = \frac{\sqrt{(a+1)^2}}{\sqrt{1+a^2}} \\ &= \frac{|a+1|}{\sqrt{1+a^2}} = \frac{1+a}{\sqrt{1+a^2}} \\ (\because \text{조건에서 } a > 1) \\ \text{또, } \sqrt{1-x} &= \frac{|a-1|}{\sqrt{1+a^2}} = \frac{-1+a}{\sqrt{1+a^2}} \\ \therefore P &= \frac{\frac{1+a}{\sqrt{1+a^2}} - \frac{-1+a}{\sqrt{1+a^2}}}{\frac{1+a}{\sqrt{1+a^2}} + \frac{-1+a}{\sqrt{1+a^2}}} \\ &= \frac{2}{2a} = \frac{1}{a}\end{aligned}$$

38. $x = \sqrt{7-4\sqrt{3}}$ 일 때, $x^4 - 4x^3 + 4x + 5$ 의 값은?

① -2

② 2

③ 4

④ 6

⑤ 9

해설

$$x = \sqrt{7-4\sqrt{3}} = \sqrt{7-2\sqrt{12}} = 2 - \sqrt{3}$$

$$\therefore x - 2 = -\sqrt{3}$$

$$x^2 - 4x + 4 = 3 \Rightarrow x^2 - 4x = -1$$

$$x^4 - 4x^3 + 4x + 5 = x^2(x^2 - 4x) + 4x + 5$$

$$= -x^2 + 4x + 5$$

$$= -(x^2 - 4x) + 5$$

$$= 1 + 5 = 6$$

39. 함수 $f(x) = \begin{cases} x^2 & (x \geq 0) \\ x & (x < 0) \end{cases}$ 에 대하여 $g(x) = f(x-2)$ 라할 때, $g^{-1}(9)$ 의 값은? (단, $g^{-1}(x)$ 는 $g(x)$ 의 역함수)

- ① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

해설

$g(x) = f(x-2)$ 이므로

$$g(x) = \begin{cases} (x-2)^2 & (x \geq 2) \\ x-2 & (x < 2) \end{cases}$$

$g^{-1}(9) = k$ 라 하면 $g(k) = 9$

$k \geq 2$ 일 때, $(k-2)^2 = 9$ 에서 $k = 5$

$k < 2$ 일 때, $k-2 = 9$ 를 만족하는 k 가 없다.

$\therefore g^{-1}(9) = 5$

40. a, b, c 가 서로 다른 수이고, $\langle a, b, c \rangle = \frac{a-c}{b-c}$ 라고 정의한다. $\langle a, b, c \rangle = x$ 라 할 때, $\langle b, c, a \rangle$ 를 x 에 관한 식으로 나타내어 그것을 $f(x)$ 라 하자. 이때, x 에 관한 식 $f(x)$ 에 대하여 $f(2) \times f(3) \times \cdots \times f(10)$ 의 값을 구하면?

- ① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{1}{4}$ ③ $\frac{1}{6}$ ④ $\frac{1}{8}$ ⑤ $\frac{1}{10}$

해설

$$(i) \langle a, b, c \rangle = \frac{a-c}{b-c} = x$$

$$\therefore a = c + (b-c)x$$

$$(ii) \langle b, c, a \rangle = \frac{b-a}{c-a} = \frac{b - \{c + (b-c)x\}}{c - \{c + (b-c)x\}} \\ = \frac{(b-c)(1-x)}{-(b-c)x} = \frac{x-1}{x}$$

$$\therefore f(x) = \frac{x-1}{x}$$

$$\therefore f(2) \times f(3) \times \cdots \times f(9) \times f(10)$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} \times \cdots \times \frac{8}{9} \times \frac{9}{10}$$

$$= \frac{1}{10}$$