1. 집합 $X = \{a,\ b,\ c\}$에 대하여 X에서 X로의 함수 중 일대일대응이 아닌 함수의 개수를 구하여라.

▶ **답 :** ______ 개

▷ **정답 :** 21 개

해설

X에서 X로의 함수의 총 개수에서
X에서 X로의 일대일대응의 개수를
제외하면 된다.
X에서 X로의 함수의 총 개수 : $3^3 = 27$
X에서 X로의 일대일대응의 개수
: $3 \times 2 \times 1 = 6$(개)
$\therefore \quad 27 - 6 = 21$(개)

2. 두 함수 $f(x) = ax + b$, $g(x) = 3x - 2$에 대하여 $(f \circ g)(1) = 2$, $(g \circ f)(2) = 3$을 만족하는 상수 a, b의 합 $4a + b$를 구하여라.

▶ **답 :**

▷ **정답 :** 1

해설

$(f \circ g)(1) = 2$에서

$(f \circ g)(1) = f(g(1)) = f(1) = a + b$

$\therefore a + b = 2$

3. 실수 전체의 집합 R에서 R로의 함수 $f(x) = |x-2| + kx - 5$의 역함수가 존재할 때, 상수 k의 범위는 무엇인가?

① $k < -1$　　② $-1 < k < 1$

③ $k < 1$　　④ $k < -1$ 또는 $k > 1$

⑤ $k > 1$

해설

$x \geq 2$ 일 때, $f(x) = (k+1)x - 7$

$x < 2$ 일 때, $f(x) = (k-1)x - 3$

그런데 $f(x)$의 역함수가 존재하므로 $f(x)$는 일대일대응이다.

따라서, $(k+1)(k-1) > 0$ 이므로

$k < -1$ 또는 $k > 1$

4. 함수 $y=(x-2)^2-1(x \le 2)$ 의 역함수를 구하면?

① $y=\sqrt{x-1}+2\ (x \ge 1)$

② $y=\sqrt{x+1}+2\ (x \ge -1)$

③ $y=-\sqrt{x+1}+2\ (x \ge -1)$

④ $y=-\sqrt{x+1}-2\ (x \ge -1)$

⑤ $y=-\sqrt{x-1}+2\ (x \ge 1)$

해설

$y=(x-2)^2-1\quad (x \le 2,\ y \ge -1)$

역함수 $x=(y-2)^2-1\quad (y \le 2,\ x \ge -1)$

$x+1=(y-2)^2$

$y=2 \pm \sqrt{x+1}$

$y \le 2$ 이므로, $y=-\sqrt{x+1}+2$

$\therefore\ y=-\sqrt{x+1}+2\ (x \ge -1)$

5. 두 함수 $f(x) = -2x+3$, $g(x) = 3x+1$ 에 대하여 $(g\circ(f\circ g)^{-1}\circ f^{-1})(5)$ 의 값을 구하시오.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$(g \circ (f \circ g)^{-1} \circ f^{-1})(5)$

$= (g \circ (g^{-1} \circ f^{-1}) \circ f^{-1})(5)$

$= (g \circ g^{-1}) \circ (f^{-1} \circ f^{-1})(5)$

$= (f^{-1} \circ f^{-1})(5)$

$= f^{-1} \circ (f^{-1}(5))$

$f^{-1}(5) = k$ 로 놓으면 $f(k) = -2k + 3 = 5$

$\therefore k = -1$

$\therefore$ (준식) $= f^{-1}(f^{-1}(5)) = f^{-1}(k) = f^{-1}(-1)$

$f^{-1}(-1) = l$ 로 놓으면

$f(l) = -2l + 3 = -1$

$\therefore l = 2$

$\therefore$ (준식) $= f^{-1}(-1) = l = 2$

6. 삼차함수 $f(x) = ax^3 + b$ 의 역함수f^{-1} 가$f^{-1}(5) = 2$ 를 만족시킬 때, $8a + b$ 의 값을 구하여라.

▶ **답 :**

▷ **정답 :** 5

해설

역함수의 성질에서 $f(a) = b \Leftrightarrow f^{-1}(b) = a$

즉 $f^{-1}(5) = 2 \quad \Rightarrow \quad f(2) = 5$ 이다.

따라서, $f(x) = ax^3 + b$ 에서

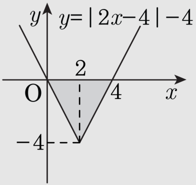
$\therefore f(2) = 8a + b = 5$

7. 함수 $y = |2x - 4| - 4$ 의 그래프와 x 축으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설



절대값 기호 안을 0으로 하는 x의 값은

$2x - 4 = 0$ 에서 $x = 2$

(i) $x < 2$ 일 때, $y = -(2x - 4) - 4 = -2x$

(ii) $x \geq 2$ 일 때, $y = (2x - 4) - 4 = 2x - 8$

따라서 (i), (ii)에 의하여

함수 $y = |2x - 4| - 4$ 의 그래프는 그림과 같으므로

구하는 도형의 넓이는 $\frac{1}{2} \times 4 \times 4 = 8$

8. 임의의 실수 x 에 대하여 $f(-x)=f(x)$ 이면 $f(x)$ 를 우함수, $f(-x)=-f(x)$ 이면 $f(x)$ 를 기함수라 한다. 다음은 「모든 함수는 우함수와 기함수의 합으로 나타낼 수 있다.」라는 명제의 참 · 거짓을 밝히는 과정이다. 다음 증명 과정에서 (가), (나), (다) 에 알맞은 것을 차례로 나열하면?

보기

임의의 함수 $f(x)$ 에 대하여 $f(x)=\dfrac{f(x)+f(-x)}{2}+\dfrac{f(x)-f(-x)}{2}$ 라고 놓고 $g(x)=\dfrac{f(x)+f(-x)}{2}$, $h(x)=\dfrac{f(x)-f(-x)}{2}$ 라 하면 $g(x)$ 는 [(가)] 이고 $h(x)$ 는 [(나)] 이다. 따라서 주어진 명제는 [(다)]이다.

① 기함수, 우함수, 참

② 우함수, 기함수, 참

③ 우함수, 우함수, 거짓

④ 기함수, 기함수, 거짓

⑤ 우함수, 기함수, 거짓

해설

$g(-x)=\dfrac{f(-x)+f(x)}{2}=g(x)$ 이므로

$g(x)$ 는 우함수 $\cdots$(가)

$$h(-x)=\frac{f(-x)-f(x)}{2}=-\frac{f(x)-f(-x)}{2}$$
$$=-h(x)$$ 이므로

$h(x)$ 는 기함수 $\cdots$(나)

따라서, 임의의 함수 $f(x)$ 를

우함수와 기함수의 합으로 나타내었으므로

주어진 명제는 참이다. $\cdots$(다)

9. 분수식 $\dfrac{x^2}{(x-y)(x-z)}+\dfrac{y^2}{(y-x)(y-z)}+\dfrac{z^2}{(z-x)(z-y)}$ 를 간단히 하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$$\frac{x^2(z-y)+y^2(z-x)+z^2(y-x)}{(x-y)(y-z)(z-x)} \cdots ①$$

①에서 분자를 x에 관하여 정리하면

$x^2(z-y)+y^2(z-x)+z^2(y-x)$

$=(z-y)x^2-(z^2-y^2)x+yz^2-y^2z$

$=(z-y)x^2-(z+y)(z-y)x+zy(z-y)$

$=(z-y)\left\{x^2-(z+y)x+zy\right\}$

$=(z-y)(x-z)(x-y)=(x-y)(y-z)(z-x)$

$\therefore$ (준식) $=\dfrac{(x-y)(y-z)(z-x)}{(x-y)(y-z)(z-x)}=1$

10. 등식 $\frac{x^2+1}{x^3-6x^2+11x-6} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x-2} + \frac{c}{x-3}$ 이 x에 대한 항등식이 되도록 상수 a, b, c에 대하여 abc의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -25

해설

$x^3-6x^2+11x-6=(x-1)(x-2)(x-3)$ 이므로

양변에 $(x-1)(x-2)(x-3)$을 곱하면

$x^2+1=a(x-2)(x-3)+b(x-1)(x-3)+c(x-1)(x-2)$

양변에 $x=1$을 대입하면 $2=2a$

$\therefore\ a=1$

양변에 $x=2$를 대입하면 $5=-b$

$\therefore\ b=-5$

양변에 $x=3$을 대입하면 $10=2c$

$\therefore\ c=5$

$\therefore\ abc=-25$

11. $2x-y$의 $x+y$에 대한 비가 $\frac{2}{3}$일 때, x의 y에 대한 비는?

① $\frac{1}{5}$ ② $\frac{4}{5}$ ③ 11 ④ $\frac{6}{5}$ ⑤ $\frac{5}{4}$

해설

$\frac{2x-y}{x+y}=\frac{2}{3}$, $3(2x-y)=2(x+y)$, $4x=5y$

$\therefore \frac{x}{y}=\frac{5}{4}$

12. x, y, z가 양의 실수이고, $\dfrac{x(y+z)}{15}=\dfrac{y(z+x)}{13}=\dfrac{z(x+y)}{18}$일 때, $x:y:z$를 구하면?

① $1:2:4$ ② $3:4:5$ ③ $5:4:8$

④ $4:7:9$ ⑤ $4:7:5$

해설

$$\frac{x(y+z)}{15}=\frac{y(z+x)}{13}=\frac{z(x+y)}{18}=k$$

$xy+xz=15k,\ yz+yx=13k,\ zx+zy=18k$

변변끼리의 합은 $2(xy+yz+zx)=46k$

$\therefore\quad xy+yz+zx=23k$

$yz=8k,\ zx=10k,\ xy=5k$

변변끼리 곱하면 $(xyz)^2=400k^3,\quad xyz>0$

$\therefore\quad xyz=20k\sqrt{k}$

$x=\dfrac{5}{2}\sqrt{k},\ y=2\sqrt{k},\ z=4\sqrt{k}$

$\therefore\ x:y:z=5:4:8$

13. 유리함수 $y = \dfrac{4x+3}{x+2}$ 의 그래프는 함수 $y = \dfrac{a}{x}$ 의 그래프를 x축의 방향으로 b만큼, y축의 방향으로 c만큼 평행 이동한 것이다. 이 때 $a+b+c$의 값은?

① -4 ② -3 ③ -2 ④ -1 ⑤ 0

해설

$y = \dfrac{4x+3}{x+2} = \dfrac{4(x+2)-5}{x+2} = 4 + \dfrac{-5}{x+2}$ 이므로

$y = \dfrac{-5}{x}$ 의 그래프를 x축 방향으로 -2,

y축 방향으로 4만큼 평행이동한 것이므로

$a+b+c = (-5)+(-2)+4 = -3$

14. 분수함수 $y = \dfrac{x-1}{x-2}$ 의 그래프에 대한 설명 중 옳은 것을 모두 고르면?

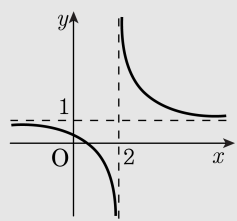
> ㉠ 제 1, 3 사분면만을 지난다.
>
> ㉡ 두 점근선의 교점은 $(2,\ 1)$ 이다.
>
> ㉢ 두 직선 $y = -x + 3,\ y = x - 1$ 에 대해 대칭인 곡선이다.

① ㉡　　② ㉠, ㉡　　③ ㉠, ㉢

④ ㉡, ㉢　　⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

㉠ 다음 그림의 개형을 가지므로 제 1, 2, 4 사분면을
지난다.



㉡ 점근선이 $x = 2,\ y = 1$ 이므로 교점은 $(2, 1)$

㉢ 주어진 분수함수가 $y = \dfrac{1}{x}$ 을 x축으로 2,
y축으로 1만큼 평행이동 시킨 것이므로
대칭되는 직선은 기울기가 ± 1 이고 $(2, 1)$ 을
지나는 직선이다.

$\Rightarrow\ \ y = x - 1,\ \ y = -x + 3$

15. 무리식 $\sqrt{2x+5}+\sqrt{15-3x}$가 실수값을 갖도록 하는 정수 x의 개수는?

① 6개 ② 7개 ③ 8개 ④ 9개 ⑤ 10개

해설

$2x+5 \geq 0,\ 2x \geq -5 \quad \therefore x \geq -2.5$

$15-3x \geq 0,\ 15 \geq 3x \quad \therefore 5 \geq x$

$\therefore -2.5 \leq x \leq 5$

$-2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$ 총 8개

16. $\dfrac{\sqrt{x+3}}{\sqrt{x-2}} = -\sqrt{\dfrac{x+3}{x-2}}$ 일 때, 방정식 $|x-3|-|x+2| = -1$ 의 해를 구하면?

① -1 ② 0 ③ 1 ④ 5 ⑤ 6

해설

$x+3 \ge 0,\ x-2 < 0 \rightarrow -3 \le x < 2$

$-(x-3)-(x+2) = -2x+3-2 = -1$

$\therefore\ x = 1$

17. $f(x) = \sqrt{x} + \sqrt{x+1}$ 일 때, $\dfrac{1}{f(1)} + \dfrac{1}{f(2)} + \cdots + \dfrac{1}{f(99)}$ 의 값을 구하여라.

▶ **답 :**

▷ **정답 :** 9

해설

$f(x) = \sqrt{x} + \sqrt{x+1}$ 이므로

$\dfrac{1}{f(x)} = \sqrt{x+1} - \sqrt{x}$

$\therefore$ (준 식) $= (\sqrt{2} - 1) + (\sqrt{3} - \sqrt{2}) + (\sqrt{4} - \sqrt{3}) + \cdots + (\sqrt{100} - \sqrt{99})$

$= \sqrt{100} - 1 = 10 - 1 = 9$

18. $x = \dfrac{1}{\sqrt{5+2\sqrt{6}}}$, $y = \dfrac{1}{\sqrt{5-2\sqrt{6}}}$ 일 때, x^2+xy+y^2 의 값은?

▶ 답 :

▷ 정답 : 11

해설

$$x = \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} = \sqrt{3}-\sqrt{2}$$

$$y = \frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} = \sqrt{3}+\sqrt{2}$$

$$x+y = 2\sqrt{3},\ \ xy = 1$$

$$x^2+xy+y^2 = (x+y)^2 - xy = 12-1 = 11$$

19. $y = -\sqrt{4-2x}+1$ 의 그래프에 대한 다음 설명 중 옳지 않은 것은?

① 정의역은 $\{x \mid x \le 2\}$ 이다.

② 치역은 $\{y \mid y \le 1\}$ 이다.

③ 평행이동하면 $y = -\sqrt{2x}$ 와 겹쳐진다.

④ 그래프는 제 2사분면을 지나지 않는다.

⑤ 이 그래프는 x축과 점 $\left(\frac{3}{2},\ 0\right)$ 에서 만난다.

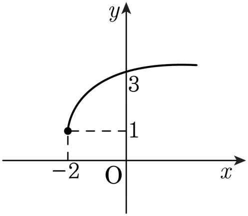
해설

③ 평행이동하면 $y = -\sqrt{-2x}$ 와 겹쳐진다.

④, ⑤ 꼭지점이 $(2,\ 1)$ 이고 $\left(\frac{3}{2},\ 0\right)$ 을 지난다.

$\therefore$ 1, 3, 4, 분면을 지난다.

20. 무리함수 $y = \sqrt{ax+b}+c$의 그래프가 다음 그림과 같을 때, $a+b+c$의 값을 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : 7

해설

주어진 그래프는 $y = \sqrt{ax}$ 의 그래프를 x 축으로 -2 만큼, y 축으로 1만큼 평행이동한 것과 같으므로 $y = \sqrt{a(x+2)}+1$

또, 점 $(0,\ 3)$ 을 지나므로

$3 = \sqrt{2a}+1,\ \ \sqrt{2a} = 2$

$\therefore\ a = 2$

따라서 $y = \sqrt{2(x+2)}+1 = \sqrt{2x+4}+1$ 이고,

이것이 $y = \sqrt{ax+b}+c$ 와 일치하므로

$a = 2,\ b = 4,\ c = 1$

$\therefore\ a+b+c = 7$

21. $8 \le x \le a$ 에서 함수 $y=-\sqrt{x+1}+3$ 의 최댓값이 b , 최솟값이 -1 일 때, $a+b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 15

해설

$y=-\sqrt{x+1}+3$ 의 그래프는 $y=-\sqrt{x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 -1 만큼, y 축의 방향으로 3 만큼 평행이동한 것이므로 x 의 값이 증가할 때, y 의 값은 감소한다.

$x=a$ 일 때 최솟값을 가지므로

$-1=-\sqrt{a+1}+3 \quad \therefore\ a=15$

$x=8$ 일 때 최댓값을 가지므로

$b=-\sqrt{8+1}+3=0$

$\therefore\ a+b=15+0=15$

22. 곡선 $y = \sqrt{4x-8}$과 직선 $y = x+k$가 한 점에서 만나기 위한 k 의 값의 범위는?

① $k=-2$ 또는 $k>1$

② $k=-1$ 또는 $k<-2$

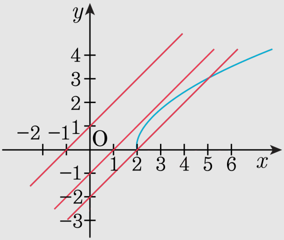
③ $k=1$ 또는 $k>2$

④ $k=2$ 또는 $k<-1$

⑤ $k=-1$

해설

그래프에서 보듯이 한 점에서 만나는 경우는
접하는 경우이거나 $k<-2$인 경우이다.



접하는 경우는 $\sqrt{4x-8} = x+k$에서

$4x-8 = x^2+2kx+k^2$

$x^2+2(k-2)x+k^2+8=0$

$\frac{D}{4} = (k-2)^2-(k^2+8) = -4k-4 = 0$에서 $k=-1$

따라서 $k=-1$ 또는 $k<-2$

23. $x > 2$에서 정의된 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 $f(x) = \sqrt{x-2}+2$, $g(x) = \dfrac{1}{x-2}+2$일 때 $(f \cdot g)(3)+(g \cdot f)(3)$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

$(f \cdot g)(3) = f(g(3)) = f(3) = 3$
$(g \cdot f)(3) = g(f(3)) = g(3) = 3$
$\therefore (f \cdot g)(3) + (g \cdot f)(3) = 6$

24. 함수 $y = \sqrt{x-3}$의 역함수를 구하면?

① $y = x^2 + 3$　　② $y = \sqrt{x+3}$

③ $y = x^2 - 3$　　④ $y = x^2 - 3\ (x \le 1)$

⑤ $y = x^2 + 3\ (x \ge 0)$

해설

$y = \sqrt{x-3}$의 정의역과 치역은
각각 $x \ge 3,\ y \ge 0$이고 양변을 제곱하면
$y^2 = x - 3,\ x = y^2 + 3$
$\therefore\ y = x^2 + 3\ (x \ge 0,\ y \ge 3)$

25. 자연수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(n) = \begin{cases} n-1 & (n \geq 100\text{일 때}) \\ f(f(n+2)) & (n < 100\text{일 때}) \end{cases}$ 에서 $f(98)$의 값을 구하면?

① 80 ② 85 ③ 95 ④ 99 ⑤ 102

해설

자연수 n에 대하여

$$f(n) = \begin{cases} n-1 & (n \geq 100\text{일 때}) \\ f(f(n+2)) & (n < 100\text{일 때}) \end{cases}$$ 이므로

$$\begin{aligned} f(98) &= f(f(100)) = f(99) = f(f(101)) \\ &= f(100) = 99 \end{aligned}$$

26. 자연수 n 을 $n = 2^p \cdot k$ (p 는 음이 아닌 정수, k 는 홀수)로 나타냈을 때, $f(n) = p$ 라 하자. 예를 들면, $f(12) = 2$ 이다. 다음 중 옳은 것을 <u>모두</u> 고르면?

㉠ n 이 홀수이면, $f(n) = 0$ 이다.
㉡ $f(8) < f(24)$ 이다.
㉢ $f(n) = 3$ 인 자연수 n 은 무한히 많다.

① ㉠ ② ㉡ ③ ㉠, ㉡ ④ ㉠, ㉢ ⑤ ㉡, ㉢

해설

$n = 2^p \cdot k$ 에서
㉠ n 이 홀수이면, k 가 홀수이므로 2^p 이 홀수
$\therefore p = 0$
즉 $f(n) = 0$
㉡ $f(8) = f(2^3 \cdot 1) = 3$, $f(24) = f(2^3 \cdot 3) = 3$
$\therefore f(8) = f(24)$
㉢ $f(n) = 3$ 에서 $n = 2^3 \cdot k$
홀수 k 는 무한집합이므로 무한히 많다.

27. R 가 실수 전체의 집합일 때, R 에서 R 로의 함수 f 를 다음과 같이 정의한다.

$$f : x \to a|x-1|+(2-a)x+a \ (x \in R,\ a \in R)$$

함수 f 가 일대일 대응이 되도록 하는 a 의 값의 범위는?

① $a < -1$ ② $a \le -1$ ③ $a > -1$

④ $a < 1$ ⑤ $a \le 1$

해설

$f(x) = a|x-1|+(2-a)x+a$ 에서 $x \ge 1,\ x < 1$ 인 경우로 나누면,

$x \ge 1$ 일 때, $f(x) = a(x-1)+(2-a)x+a$

$x < 1$ 일 때, $f(x) = a(1-x)+(2-a)x+a$

$$\therefore\ f(x) = \begin{cases} 2x & (x \ge 1) \\ -2(a-1)x+2a & (x < 1) \end{cases}$$

함수 $f(x)$ 가 R 에서 R 로의 일대일 대응이려면

$x \ge 1$ 에서 기울기가 양이므로 $x < 1$ 에서도 기울기가 양이어야 한다.

즉, $-2(a-1) > 0,\ a-1 < 0$

$\therefore\ a < 1$

28. 두 집합 $X=\{-1,\ 0,\ 1\}$, $Y=\{-2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2\}$에 대하여 X 에서 Y 로의 함수 중 다음 조건을 모두 만족시키는 함수 f 의 개수는 몇 개인가?

> X 의 임의의 두 원소 $x_1,\ x_2$ 에 대하여
> Ⅰ. $f(x_1+x_2)=f(x_1)+f(x_2)$
> Ⅱ. $f(x_1)=f(x_2)$ 이면 $x_1=x_2$

① 2 개　② 4 개　③ 6 개　④ 8 개　⑤ 12 개

해설

조건 Ⅰ 에서, $x_1=0,\ x_2=0$ 이면
$f(0)=f(0)+f(0)$ 에서 $f(0)=0$
$x_1=1,\ x_2=-1$ 이면
$f(0)=f(1)+f(-1)$ 에서, $f(-1)=-f(1)$
이때, 조건 Ⅱ 에 의해
$f(1)\neq 0,\ f(-1)\neq 0$
따라서, 두 조건을 만족시키는
함수 f 의 개수는 0 이 대응 할 수 있는
원소는 0 의 1 가지,
1 이 대응할 수 있는 원소는
$-2,\ -1,\ 1,\ 2$ 의 4 가지,
-1 이 대응할 수 있는 원소는 $-f(1)$ 의 1 가지,
따라서, $1\times4\times1=4$ (개)

29. 함수 $f(x) = x-1$ 에 대하여 $(\underline{f \circ f \circ \cdots \circ f})(a) = 1$ 을 만족하는 상수 a 의 값은? (단, 밑줄 그은 부분의 f 의 갯수는 10개)

① -10　② -5　③ 1　④ 5　⑤ 11

해설

$f(x) = x-1$

$(f \circ f)(x) = f(f(x)) = f(x-1) = (x-1)-1 = x-2$

$(f \circ f \circ f)(x) = f(f(f(x))) = f(x-2) = (x-2)-1 = x-3$

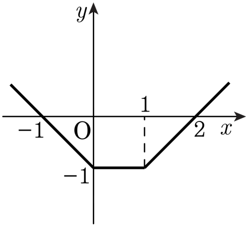
$\vdots$

$(\underline{f \circ f \circ \cdots \circ f})(x) = x-10$

밑줄 그은 부분은 10개.

따라서, $a-10 = 1$ 에서 $a = 11$

30. 다음 그림은 $y=f(x)$의 그래프이다. 이때, $y=f(x)$와 $y=|f(x)|$의 그래프로 둘러싸인 부분의 넓이는?

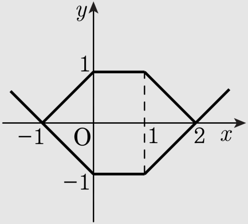


① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$y=|f(x)|$의 그래프는 $y=f(x)$의 그래프에서
x축의 윗부분은 그대로 두고 x축의 아랫부분을
x축에 대하여 대칭이동하면 된다.
따라서, 두 그래프로 둘러싸인 부분은 다음 그림과 같으므로 그 넓이는

$$2\left(\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1+1\cdot 1+\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1\right)=4$$



31. 함수 $f(x) = |x-1| + |x-2| + |x-a|$ 가 $x = a$ 에서 최솟값을 가질 때, $f(0) + f(3)$ 의 값은?

① 9 ② -9 ③ $2a$

④ $2a-3$ ⑤ $-2a+3$

해설

절댓값 기호가 홀수 개 있을 때, 절댓값 기호 안의 값이 0 이 되게 하는 x 의 값 중 가운데 값에서 최솟값을 가지므로 $x = a$ 에서 $f(x)$ 가 최솟값을 가지려면 $1 \le a \le 2$ 이어야 한다.

이 때, $f(0) = |-1| + |-2| + |-a| = 3 + a$

$f(3) = |2| + |1| + |3-a| = 6 - a$

$\therefore f(0) + f(3) = 3 + a + 6 - a = 9$

32. 다항함수 $f(x)=\dfrac{x-a}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{x-b}{(b-c)(b-a)}$ $+\dfrac{x-c}{(c-a)(c-b)}$ 일 때, $f(2013)$ 의 값은?

① $a+b+c$　② $a^2+b^2+c^2$　③ $a^3+b^3+c^3$
④ $ab+bc+ca$　⑤ 0

해설

주어진 식을 통분하면
(분자)
$=\{(x-a)(b-c)+(x-b)(c-a)+(x-c)(a-b)\}$
$=(b-c+c-a+a-b)x$
$+(-ab+ac-bc+ab-ca+cb)=0$
$\therefore\ f(x)=0\quad\therefore\ f(2013)=0$

해설

주어진 식의 분모는 0이 아니므로
$a,\ b,\ c$는 서로 다른 수이고

$$f(a)=\frac{a-b}{(b-c)(b-a)}+\frac{a-c}{(c-a)(c-b)}$$
$$=\frac{-1}{b-c}+\frac{1}{b-c}=0$$
$$f(b)=\frac{b-a}{(a-b)(a-c)}+\frac{b-c}{(c-a)(c-b)}$$
$$=\frac{-1}{a-c}+\frac{1}{a-c}=0$$

그런데 $f(x)$는 일차이하의 함수이고
$f(a)=f(b)=0$이므로
모든 실수 x에 대하여 $f(x)=0$이다.
$\therefore\ f(2013)=0$

33. 분수식 $\dfrac{x-1}{x+1}+\dfrac{x+1}{x-1}-\dfrac{x^2+1}{x^2+x}$를 간단히 하면?

① $\dfrac{x^2+1}{x(x+1)}$　② $\dfrac{x^2+2}{x(x-1)}$

③ $\dfrac{x^2+2}{x(x+1)}$　④ $\dfrac{x^2+1}{x(x-1)}$

⑤ $\dfrac{x^2+1}{x(x+1)(x+1)}$

해설

$$\frac{x-1}{x+1}+\frac{x+1}{x-1}-\frac{x^2+1}{x^2+x}$$
$$=\frac{(x-1)^2+(x+1)^2}{(x+1)(x-1)}-\frac{x^2+1}{x^2+x}$$
$$=\frac{2x^2+2}{(x+1)(x-1)}-\frac{x^2+1}{x^2+x}$$
$$=\frac{(2x^2+2)x-(x-1)(x^2+1)}{x(x+1)(x-1)}$$
$$=\frac{(x^2+1)(2x-x+1)}{x(x+1)(x-1)}$$
$$=\frac{(x^2+1)(x+1)}{x(x+1)(x-1)}$$
$$=\frac{x^2+1}{x(x-1)}$$

34. $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{99\cdot 100}=\frac{a}{100}, \frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\cdots+\frac{1}{99\cdot 101}=\frac{b}{101}$ 일 때, $a+b$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 149

해설

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{99\cdot 100}$$
$$=\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{98}-\frac{1}{99}\right)+\left(\frac{1}{99}-\frac{1}{100}\right)=1-\frac{1}{100}$$
$$=\frac{99}{100}=\frac{a}{100}$$
$\therefore\ a=99$
$$\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\cdots+\frac{1}{99\cdot 101}$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{97}-\frac{1}{99}\right)+\left(\frac{1}{99}-\frac{1}{101}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{101}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{100}{101}=\frac{50}{101}=\frac{b}{101}$$
$\therefore\ b=50$

$\therefore\ a+b=149$

35. 어느 회사원의 연간 소득은 Y원이다. 이 소득의 $a\%$에 대해서는 세금이 부과되지 않고, 그 나머지 소득에 대해서만 $b\%$의 세금이 부과된다. 이 사람은 세금을 납부하고 난 후의 소득 중 C원을 소비하고 나머지는 모두 저축한다. 이 사람의 연간 저축액 S원은?

① $S=\left(1-\frac{a}{100}-\frac{b}{100}\right)Y-C$

② $S=\left(1-\frac{a}{100}-\frac{b}{100}\right)Y+C$

③ $S=\left(1-\frac{a}{100}\cdot\frac{b}{100}+\frac{b}{100}\right)Y-C$

④ $S=\left(1+\frac{a}{100}\cdot\frac{b}{100}-\frac{b}{100}\right)Y+C$

⑤ $S=\left(1+\frac{a}{100}\cdot\frac{b}{100}-\frac{b}{100}\right)Y-C$

해설

비과세 소득은 $Y\times\frac{a}{100}$원이고 나머지 금액 $Y\left(1-\frac{a}{100}\right)$에 대한 $b\%$의 세금을 납부하고 C원을 소비한 후 저축하므로

$$S=Y\times\frac{a}{100}+Y\left(1-\frac{a}{100}\right)\left(1-\frac{b}{100}\right)-C$$

$$=\left(1+\frac{a}{100}\cdot\frac{b}{100}-\frac{b}{100}\right)Y-C$$

36. 무리수 $\sqrt{k}$의 정수 부분을 a, 소수 부분을 b라 할 때, $a^3+b^3=9ab$을 만족하는 양의 정수 k를 구하면?

① 6 ② 4 ③ 2 ④ 1 ⑤ 11

해설

$\sqrt{k}=a+b \quad \therefore\ b=\sqrt{k}-a$

$a^3+b^3=9ab, \quad a^3+(\sqrt{k}-a)^3=9a(\sqrt{k}-a)$

$\therefore\ 3a(3a-k)+\sqrt{k}(3a^2-9a+k)=0$

$a,\ k$가 정수이므로

$3a(3a-k)=0, \quad 3a^2-9a+k=0$

연립하여 풀면

$\therefore a=2, \quad k=6$

37. $x = \dfrac{2a}{1+a^2}$ $(a > 1)$ 일 때, $P = \dfrac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}}$ 의 값을 구하면?

① a　② $a+1$　③ $a-1$　④ a^2　⑤ $\dfrac{1}{a}$

해설

$$\sqrt{1+x} = \sqrt{1 + \frac{2a}{1+a^2}}$$

$$= \sqrt{\frac{1+2a+a^2}{1+a^2}} = \frac{\sqrt{(a+1)^2}}{\sqrt{1+a^2}}$$

$$= \frac{|a+1|}{\sqrt{1+a^2}} = \frac{1+a}{\sqrt{1+a^2}}$$

$(\because$ 조건에서 $a > 1\ )$

또, $\sqrt{1-x} = \dfrac{|a-1|}{\sqrt{1+a^2}} = \dfrac{-1+a}{\sqrt{1+a^2}}$

$$\therefore\ P = \frac{\dfrac{1+a}{\sqrt{1+a^2}} - \dfrac{-1+a}{\sqrt{1+a^2}}}{\dfrac{1+a}{\sqrt{1+a^2}} + \dfrac{-1+a}{\sqrt{1+a^2}}}$$

$$= \frac{2}{2a} = \frac{1}{a}$$

38. $x = \sqrt{7-4\sqrt{3}}$일 때, $x^4 - 4x^3 + 4x + 5$의 값은?

① -2 ② 2 ③ 4 ④ 6 ⑤ 9

해설

$x = \sqrt{7-4\sqrt{3}} = \sqrt{7-2\sqrt{12}} = 2-\sqrt{3}$

$\therefore x-2 = -\sqrt{3}$

$x^2-4x+4 = 3 \Rightarrow x^2-4x = -1$

$$\begin{aligned} x^4-4x^3+4x+5 &= x^2(x^2-4x)+4x+5 \\ &= -x^2+4x+5 \\ &= -(x^2-4x)+5 \\ &= 1+5 = 6 \end{aligned}$$

39. 함수 $f(x)=\begin{cases} x^2 & (x \geq 0) \\ x & (x < 0) \end{cases}$ 에 대하여 $g(x)=f(x-2)$ 라할 때, $g^{-1}(9)$ 의 값은? (단, $g^{-1}(x)$ 는 $g(x)$ 의 역함수)

① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

해설

$g(x)=f(x-2)$ 이므로

$$g(x)=\begin{cases} (x-2)^2 & (x \geq 2) \\ x-2 & (x < 2) \end{cases}$$

$g^{-1}(9)=k$ 라 하면 $g(k)=9$

$k \geq 2$ 일 때, $(k-2)^2=9$ 에서 $k=5$

$k < 2$ 일 때, $k-2=9$ 를 만족하는 k 가 없다.

$\therefore\ g^{-1}(9)=5$

40. a, b, c가 서로 다른 수이고, $< a,\ b,\ c >= \dfrac{a-c}{b-c}$라고 정의한다. $< a,\ b,\ c >= x$라 할 때, $< b,\ c,\ a >$를 x에 관한 식으로 나타내어 그것을 $f(x)$라 하자. 이때, x에 관한 식 $f(x)$에 대하여 $f(2)\times f(3)\times\cdots\times f(10)$의 값을 구하면?

① $\dfrac{1}{2}$ ② $\dfrac{1}{4}$ ③ $\dfrac{1}{6}$ ④ $\dfrac{1}{8}$ ⑤ $\dfrac{1}{10}$

해설

(i) $< a,\ b,\ c >= \dfrac{a-c}{b-c} = x$

$\therefore\ \ a = c + (b-c)x$

(ii) $< b,\ c,\ a > = \dfrac{b-a}{c-a} = \dfrac{b-\{c+(b-c)x\}}{c-\{c+(b-c)x\}}$

$$= \frac{(b-c)(1-x)}{-(b-c)x} = \frac{x-1}{x}$$

$\therefore\ \ f(x) = \dfrac{x-1}{x}$

$\therefore f(2)\times f(3)\times\cdots\times f(9)\times f(10)$

$= \dfrac{1}{2}\times\dfrac{2}{3}\times\dfrac{3}{4}\times\cdots\times\dfrac{8}{9}\times\dfrac{9}{10}$

$= \dfrac{1}{10}$