1. 집합 $X = \{-1, 0, 1\}$ 에 대하여 함수 f 가 $f : X \to X$ 라 할 때, $\{f(-1)+1\}\{f(1)-1\} \neq 0$ 을 만족하는 함수 f 의 개수를 구하시오.

▶ 답 :

▷ 정답 : 12

해설

$f(-1) \neq -1$, $f(1) \neq 1$ 이므로
X 의 원소 -1, 0, 1 에 대응할 수 있는 경우의 수가
각각 2, 3, 2 가지이다.
$\therefore 2 \times 3 \times 2 = 12$

해설

함수 f 의 개수는 모두 27 개이다.
i) $f(-1) = -1$ 인 함수의 개수는 9 개
ii) $f(1) = 1$ 인 함수의 개수는 9 개
iii) $f(-1) = -1$, $f(1) = 1$ 인 함수의 개수는 3 개
$\therefore\ 27 - (9 + 9 - 3) = 12$

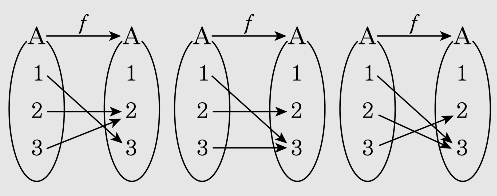
2. 집합 $A = \{1,\ 2,\ 3\}$ 에 대하여 다음 두 조건을 모두 만족시키는 함수 $f : A \to A$ 의 개수는 몇 개인가?

Ⅰ. $f(1) = 3$ Ⅱ. $x \in A$ 에 대하여 $f(x)$ 의 최솟값은 2 이다.

① 1 개　② 2 개　③ 3 개　④ 4 개　⑤ 5 개

해설

두 조건을 만족시키기 위해서는
$f(2) = 2$ 또는 $f(3) = 2$ 를 만족시키고
$f(2),\ f(3)$ 의 값이 동시에
3 이 되어서는 안되며 어떤 원소도
1 에 대응해서는 안된다.
따라서, 함수 f 의 대응은 다음과 같다.



$\therefore$ 3 개

3. 함수 $f(x)$가

$$f(x)=\begin{cases} x & (x\text{는유리수}) \\ 1-x & (x\text{는무리수}) \end{cases}$$ 일 때, $(f\circ f)(x)$는 무엇인가?

① $-x$ ② $1-x$ ③ $2x-3$

④ x ⑤ $x+2$

해설

$$f(x)=\begin{cases} x & (x\text{는유리수}) \\ 1-x & (x\text{는무리수}) \end{cases}$$

$(f\circ f)(x)=f(f(x))$

(i) x 가 유리수일 때, $f(f(x))=f(x)=x$

(ii) x가 무리수이면 $1-x$ 도 무리수이므로,

$f(f(x))=f(1-x)=1-(1-x)=x$

(i), (ii)에 의해서 $f(f(x))=x$

4. $f \circ f$를 f^2, $f \circ f \circ f$를 f^3과 같이 나타낼 때, $f(x) = \dfrac{x}{x-1}$ 이면 $f^3(2)$의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$$f^2(x) = (f \circ f)(x) = f(f(x)) = \frac{f(x)}{f(x)-1}$$
$$= \frac{\frac{x}{x-1}}{\frac{x}{x-1}-1} = x$$
$$\therefore\ f^3(x) = (f \circ f \circ f)(x) = f((f \circ f)(x))$$
$$= f(f^2(x)) = f(x) = \frac{x}{x-1}$$
$$\therefore\ f^3(2) = 2$$

5. 함수 $f(x) = -x,\ g(x) = 2x-1$ 일 때, $(h \circ g \circ f)(x) = f(x)$ 인 일차함수 $h(x)$ 를 구하면?

① $y = \frac{1}{4}x + 2$　② $y = \frac{1}{4}x - 2$　③ $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$
④ $y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$　⑤ $y = \frac{1}{2}x + 2$

해설

$h(x) = ax + b$ 라고 놓으면,
$(h \circ g \circ f)x = (h \circ g)(f(x)) = f(x)$ 에서 $h \circ g = I$
즉 $(h \circ g)(x) = x,\ a(2x-1) + b = x$
$x = 1$ 일 때, $a + b = 1$
$x = 0$ 일 때, $-a + b = 0$
$\therefore\ a = \frac{1}{2},\ b = \frac{1}{2}$
따라서 $h(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$

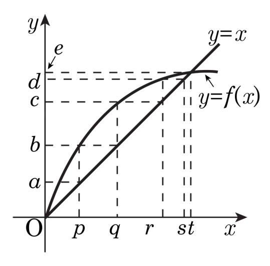
6. 두 함수 $f(x)=3x+2$, $g(x)=-2x+k$ 에 대하여 $(f\circ g)(x)=(g\circ f)(x)$ 가 성립할 때, k 의 값은?

① 0 ② -1 ③ -2 ④ -3 ⑤ -4

해설

$(f\circ g)(x)=(g\circ f)(x)$ 에서
$-6x+3k+2=-6x-4+k$
$2k=-6$ 에서 $k=-3$

7. 림은 $y=f(x)$ 와 $y=x$ 의 그래프이다. 이를 이용하여 $(f\circ f)(x)=d$ 를 만족시키는 x 의 값은 얼마인가?



① p　　② q　　③ r

④ s　　⑤ t

해설

$(f\circ f)(x)=f(f(x))=d\cdots\cdots$ ㉠

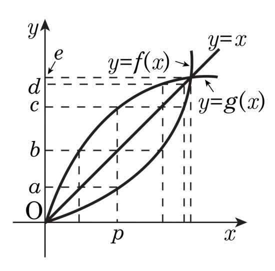
그런데, 주어진 그래프에서 $f(r)=d$ 이므로

㉠에서 $f(x)=r$

$\therefore r=c$ 에서 $f(x)=r=c$

$\therefore x=q$

8. 두 함수 $y = f(x)$, $y = g(x)$ 의 그래프가 그림과 같을 때, $(f \circ g)(p)$ 의 값은 얼마인가? (단, 점선은 x 축 또는 y 축에 평행하다.)



① a ② b ③ c

④ d ⑤ e

해설

주어진 그림에서 $g(p) = c, f(c) = b$

$\therefore (f \circ g)(p) = f(g(p)) = f(c) = b$

9. 두 집합 $X = \{x \mid 0 \le x \le 2\}$, $Y = \{y \mid a \le y \le b\}$에서 $f : X \to Y$, $f(x) = x + 1$의 역함수 $f^{-1} : Y \to X$가 존재할 때, $a + b$의 값은 얼마인가? (단, a, b는실수)

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

해설

함수 $y = f(x)$의 역함수가 존재하면
일대일대응이다.
즉, 공역은 치역과 같으므로 치역을 구하면
$f(0) = 1, f(2) = 3$에서
$Y\{y \mid a \le y \le b\} = \{y \mid 1 \le y \le 3\}$
$\therefore a = 1,\ b = 3$
$\therefore a + b = 4$

10. 실수 전체 집합에서 함수 $f(x)$ 를 $f(x) = \begin{cases} (a+2)x \ (x \ge 0) \\ (1-a)x \ (x < 0) \end{cases}$ 로 정의할 때, 함수 $f(x)$ 의 역함수가 존재할 조건은?

① $-1 < a < 1$ ② $-2 < a < 1$ ③ $a < -2,\ a > 1$
④ $-1 < a \le 1$ ⑤ $-2 \le a < 1$

해설
역함수가 존재하려면
$y = (a+2)x$와 $y = (1-a)x$의 기울기의 부호가 같아야 한다.
즉 $(a+2)(1-a) > 0$, $(a+2)(a-1) < 0$
$\therefore\ -2 < a < 1$

11. 두 함수 $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & (x \geq 2) \\ 2x + 1 & (x < 2) \end{cases}$, $g(x) = 3x - 1$ 에 대하여 $(f \circ g^{-1})(2)$ 의 값을 구하면?

① 0 ② 3 ③ 6 ④ 8 ⑤ 11

해설

$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & (x \geq 2) \\ 2x + 1 & (x < 2) \end{cases}$, $g(x) = 3x - 1$ $g^{-1}(2) = a$ 라고 하면

$g(a) = 2, 3a - 1 = 2$

$\therefore$ $a = 1$ 이므로 $(f \circ g^{-1})(2) = f(g^{-1}(2)) = f(1)$

$\therefore$ $f(1) = 2 \cdot 1 + 1 = 3$ $(\because 1 < 2)$

12. $f(x) = \begin{cases} 2x+1 & (x \geq 0) \\ 1-x^2 & (x < 0) \end{cases}$ 으로 정의된 함수 f 에 대하여 $f^{-1}(3) + f^{-1}(a) = 0$ 을 만족시키는 a 의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$f^{-1}(3) = b$ 라고 하면 $f(b) = 3$ 에서 $2b + 1 = 3$

$\therefore\ b = 1$

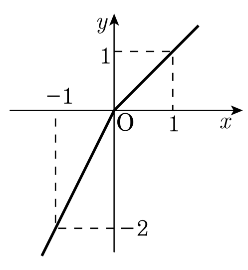
이 때, $f^{-1}(3) + f^{-1}(a) = 0$ 에서

$1 + f^{-1}(a) = 0,\ f^{-1}(a) = -1$

$\therefore\ f(-1) = a$

$\therefore\ a = 1 - (-1)^2 = 0$

13. 함수 $y = f(x)$ 의 그래프는 아래 그림과 같이 원점과 두 점 $(1, 1), (-1, -2)$ 를 각각 지나는 두 반직선으로 이루어져 있다. 이 때, [보기] 중 옳은 것을 모두 고른 것은 무엇인가?



보기

㉠ $f(10) = f(f(10))$

㉡ $f^{-1}(-2) = -1$

㉢ $y = f(x)$ 의 그래프와 $f(x)$ 의 역함수 $y = f^{-1}(x)$ 의 그래프의 교점은 두 개뿐이다.

① ㉠ ② ㉢ ③ ㉠,㉡
④ ㉡,㉢ ⑤ ㉠,㉡,㉢

해설

㉠ $f(10) = 10$
$f(f(10)) = f(10) = 10$
$\therefore f(10) = f(f(10))$ (참)

㉡ $f(-1) = -2 \Leftrightarrow f^{-1}(-2) = -1$ (참)

㉢ $y = f^-1(x)$ 의 그래프는 $y = f(x)$ 의 그래프를 $y = x$에 대하여 대칭이동시킨 그래프이다.

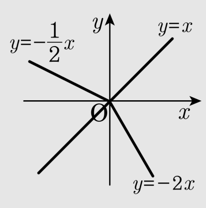
따라서 $y = f(x)$ 와 $y = f^{-1}(x)$ 는
무수히 많은 점에서 만난다. (거짓)
따라서 옳은 것은 ㉠, ㉡ 이다.

14. 함수 $f(x)=\begin{cases}-2x & (x\geq 0)\\ ax & (x<0)\end{cases}$ 가 모든 실수 x에 대하여 $f^{-1}(x)=f(x)$를 만족할 때, 상수 a의 값은? (단, $f^{-1}(x)$는 $f(x)$의 역함수이다.)

① 2 ② $\frac{1}{2}$ ③ $-\frac{1}{2}$ ④ -1 ⑤ -2

해설

$f^{-1}(x)=f(x)$이려면 $y=f(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이어야 한다.
직선 $y=x$에 대하여 직선 $y=-2x$와 대칭인 직선의 방정식은 $x=-2y$
즉, $y=-\frac{1}{2}x$이므로 $a=-\frac{1}{2}$이다.



15. 점 $(2,\ 1)$을 지나는 일차함수 $y = f(x)$의 그래프와 $y = f^{-1}(x)$의 그래프가 일치할 때, $f(-2)$의 값은?

① -5　　② -2　　③ 0　　④ 2　　⑤ 5

해설

$f = f^{-1}$이므로 $(f \circ f)(x) = x$

$f(x) = m(x-2) + 1 = mx - 2m + 1\ (m \neq 0)$ 으로 놓으면

$f(f(x)) = m(mx - 2m + 1) - 2m + 1 = x$

$\therefore m^2x - 2m^2 - m + 1 = x$

즉, $m^2 = 1,\ -2m^2 - m + 1 = 0$이므로

$m = -1$

따라서 $f(x) = -x + 3$이고

$f(-2) = -(-2) + 3 = 5$ 이다.

16. 점 $(-1,\ -2)$를 지나는 일차함수 $y=f(x)$의 그래프와 $y=f^{-1}(x)$의 그래프가 일치할 때, $f(-3)$의 값은?

① -6　　② -3　　③ 0　　④ 3　　⑤ 6

해설

$f=f^{-1}$이므로 $(f\circ f)(x)=x$
$f(x)=a(x+1)-2=ax+a-2\ (a\neq 0)$로 놓으면
$f(f(x))=a(ax+a-2)+a-2=x$
$\therefore a^2x+a^2-a-2=x$
즉, $a^2=1$, $a^2-a-2=0$이므로 $a=-1$
따라서 $f(x)=-x-3$이고
$f(-3)=-(-3)-3=0$이다.