

1. 집합 $X = \{-1, 0, 1\}$ 에 대하여 함수 f 가 $f : X \rightarrow X$ 라 할 때, $\{f(-1) + 1\} \{f(1) - 1\} \neq 0$ 을 만족하는 함수 f 의 개수를 구하시오.

▶ 답 :

▷ 정답 : 12

해설

$f(-1) \neq -1, f(1) \neq 1$ 이므로
 X 의 원소 $-1, 0, 1$ 에 대응할 수 있는 경우의 수가
각각 2, 3, 2 가지이다.
 $\therefore 2 \times 3 \times 2 = 12$

해설

함수 f 의 개수는 모두 27 개이다.
i) $f(-1) = -1$ 인 함수의 개수는 9 개
ii) $f(1) = 1$ 인 함수의 개수는 9 개
iii) $f(-1) = -1, f(1) = 1$ 인 함수의 개수는 3 개
 $\therefore 27 - (9 + 9 - 3) = 12$

2. 집합 $A = \{1, 2, 3\}$ 에 대하여 다음 두 조건을 모두 만족시키는 함수 $f: A \rightarrow A$ 의 개수는 몇 개인가?

I. $f(1) = 3$

II. $x \in A$ 에 대하여 $f(x)$ 의 최솟값은 2이다.

① 1 개

② 2 개

③ 3 개

④ 4 개

⑤ 5 개

해설

두 조건을 만족시키기 위해서는

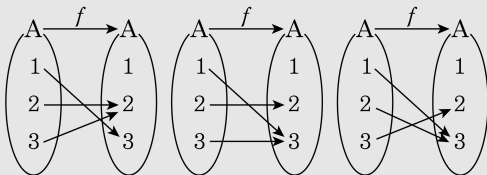
$f(2) = 2$ 또는 $f(3) = 2$ 를 만족시키고

$f(2), f(3)$ 의 값이 동시에

3이 되어서는 안되며 어떤 원소도

1에 대응해서는 안된다.

따라서, 함수 f 의 대응은 다음과 같다.



$\therefore$ 3 개

3. 함수 $f(x)$ 가

$$f(x) = \begin{cases} x & (x \text{는 유리수}) \\ 1-x & (x \text{는 무리수}) \end{cases} \text{ 일 때, } (f \circ f)(x) \text{ 는 무엇인가?}$$

① $-x$

② $1-x$

③ $2x-3$

④ x

⑤ $x+2$

해설

$$f(x) = \begin{cases} x & (x \text{는 유리수}) \\ 1-x & (x \text{는 무리수}) \end{cases}$$

$$(f \circ f)(x) = f(f(x))$$

(i) x 가 유리수일 때, $f(f(x)) = f(x) = x$

(ii) x 가 무리수이면 $1-x$ 도 무리수이므로,

$$f(f(x)) = f(1-x) = 1-(1-x) = x$$

(i), (ii)에 의해서 $f(f(x)) = x$

4. $f \circ f$ 를 f^2 , $f \circ f \circ f$ 를 f^3 과 같이 나타낼 때, $f(x) = \frac{x}{x-1}$ 이면 $f^3(2)$ 의 값은?

① -2

② -1

③ 0

④ 1

⑤ 2

해설

$$f^2(x) = (f \circ f)(x) = f(f(x)) = \frac{f(x)}{f(x) - 1}$$

$$= \frac{\frac{x}{x-1}}{\frac{x}{x-1} - 1} = x$$

$$\begin{aligned}\therefore f^3(x) &= (f \circ f \circ f)(x) = f((f \circ f)(x)) \\ &= f(f^2(x)) = f(x) = \frac{x}{x-1}\end{aligned}$$

$$\therefore f^3(2) = 2$$

5. 함수 $f(x) = -x$, $g(x) = 2x - 1$ 일 때, $(h \circ g \circ f)(x) = f(x)$ 인 일차함수 $h(x)$ 를 구하면?

① $y = \frac{1}{4}x + 2$

② $y = \frac{1}{4}x - 2$

③ $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$

④ $y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$

⑤ $y = \frac{1}{2}x + 2$

해설

$h(x) = ax + b$ 라고 놓으면,

$(h \circ g \circ f)x = (h \circ g)(f(x)) = f(x)$ 에서 $h \circ g = I$

즉 $(h \circ g)(x) = x$, $a(2x - 1) + b = x$

$x = 1$ 일 때, $a + b = 1$

$x = 0$ 일 때, $-a + b = 0$

$$\therefore a = \frac{1}{2}, b = \frac{1}{2}$$

따라서 $h(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$

6. 두 함수 $f(x) = 3x+2$, $g(x) = -2x+k$ 에 대하여 $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x)$ 가 성립할 때, k 의 값은?

① 0

② -1

③ -2

④ -3

⑤ -4

해설

$$\begin{aligned}(f \circ g)(x) &= (g \circ f)(x) \text{에서} \\ -6x + 3k + 2 &= -6x - 4 + k \\ 2k &= -6 \text{에서 } k = -3\end{aligned}$$

7. 림은 $y = f(x)$ 와 $y = x$ 의 그래프이다. 이를 이용하여 $(f \circ f)(x) = d$ 를 만족시키는 x 의 값은 얼마인가?

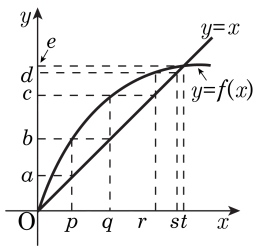
① p

② q

③ r

④ s

⑤ t



해설

$$(f \circ f)(x) = f(f(x)) = d \dots \dots \textcircled{7}$$

그런데, 주어진 그래프에서 $f(r) = d$ 이므로

$$\textcircled{7} \text{에서 } f(x) = r$$

$$\therefore r = c \text{ 에서 } f(x) = r = c$$

$$\therefore x = q$$

8. 두 함수 $y = f(x)$, $y = g(x)$ 의 그래프가 그림과 같을 때, $(f \circ g)(p)$ 의 값은 얼마인가? (단, 점선은 x 축 또는 y 축에 평행하다.)

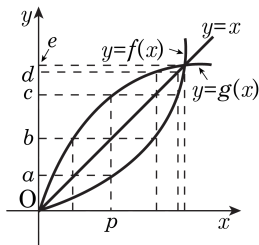
① a

② b

③ c

④ d

⑤ e



해설

주어진 그림에서 $g(p) = c, f(c) = b$

$\therefore (f \circ g)(p) = f(g(p)) = f(c) = b$

9. 두 집합 $X = \{x \mid 0 \leq x \leq 2\}$, $Y = \{y \mid a \leq y \leq b\}$ 에서 $f : X \rightarrow Y$, $f(x) = x + 1$ 의 역함수 $f^{-1} : Y \rightarrow X$ 가 존재할 때, $a + b$ 의 값은 얼마인가? (단, a, b 는 실수)

① 1

② 2

③ 3

④ 4

⑤ 5

해설

함수 $y = f(x)$ 의 역함수가 존재하면
일대일대응이다.

즉, 공역은 치역과 같으므로 치역을 구하면

$f(0) = 1, f(2) = 3$ 에서

$Y\{y \mid a \leq y \leq b\} = \{y \mid 1 \leq y \leq 3\}$

$\therefore a = 1, b = 3$

$\therefore a + b = 4$

10. 실수 전체 집합에서 함수 $f(x)$ 를 $f(x) = \begin{cases} (a+2)x & (x \geq 0) \\ (1-a)x & (x < 0) \end{cases}$ 로

정의할 때, 함수 $f(x)$ 의 역함수가 존재할 조건은?

① $-1 < a < 1$

② $-2 < a < 1$

③ $a < -2, a > 1$

④ $-1 < a \leq 1$

⑤ $-2 \leq a < 1$

해설

역함수가 존재하려면

$y = (a+2)x$ 와 $y = (1-a)x$ 의 기울기의 부호가 같아야 한다.

즉 $(a+2)(1-a) > 0, (a+2)(a-1) < 0$

$\therefore -2 < a < 1$

11. 두 함수 $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & (x \geq 2) \\ 2x + 1 & (x < 2) \end{cases}$, $g(x) = 3x - 1$ 에 대하여 $(f \circ g^{-1})(2)$ 의 값을 구하면?

① 0

② 3

③ 6

④ 8

⑤ 11

해설

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & (x \geq 2) \\ 2x + 1 & (x < 2) \end{cases}, g(x) = 3x - 1 \quad g^{-1}(2) = a \text{ 라고 하면}$$

$$g(a) = 2, 3a - 1 = 2$$

$$\therefore a = 1 \quad \therefore (f \circ g^{-1})(2) = f(g^{-1}(2)) = f(1)$$

$$\therefore f(1) = 2 \cdot 1 + 1 = 3 \quad (\because 1 < 2)$$

12. $f(x) = \begin{cases} 2x + 1 & (x \geq 0) \\ 1 - x^2 & (x < 0) \end{cases}$ 으로 정의된 함수 f 에 대하여 $f^{-1}(3) +$

$f^{-1}(a) = 0$ 을 만족시키는 a 의 값은?

① -2

② -1

③ 0

④ 1

⑤ 2

해설

$f^{-1}(3) = b$ 라고 하면 $f(b) = 3$ 에서 $2b + 1 = 3$

$\therefore b = 1$

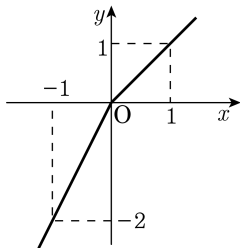
이 때, $f^{-1}(3) + f^{-1}(a) = 0$ 에서

$1 + f^{-1}(a) = 0, f^{-1}(a) = -1$

$\therefore f(-1) = a$

$\therefore a = 1 - (-1)^2 = 0$

13. 함수 $y = f(x)$ 의 그래프는 아래 그림과 같이 원점과 두 점 $(1, 1), (-1, -2)$ 를 각각 지나는 두 반직선으로 이루어져 있다. 이 때, [보기] 중 옳은 것을 모두 고른 것은 무엇인가?



보기

- ㉠ $f(10) = f(f(10))$
 ㉡ $f^{-1}(-2) = -1$
 ㉢ $y = f(x)$ 의 그래프와 $f(x)$ 의 역함수 $y = f^{-1}(x)$ 의 그래프의 교점은 두 개뿐이다.

① ㉠

② ㉢

③ ㉠, ㉡

④ ㉡, ㉢

⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

㉠ $f(10) = 10$

$f(f(10)) = f(10) = 10$

$\therefore f(10) = f(f(10))$ (참)

㉡ $f(-1) = -2 \Leftrightarrow f^{-1}(-2) = -1$ (참)

㉢ $y = f^{-1}(x)$ 의 그래프는 $y = f(x)$ 의 그래프를 $y = x$ 에 대하여 대칭이동시킨 그래프이다.

따라서 $y = f(x)$ 와 $y = f^{-1}(x)$ 는 무수히 많은 점에서 만난다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㉠, ㉡ 이다.

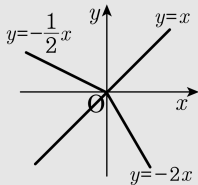
14. 함수 $f(x) = \begin{cases} -2x & (x \geq 0) \\ ax & (x < 0) \end{cases}$ 가 모든 실수 x 에 대하여 $f^{-1}(x) = f(x)$

를 만족할 때, 상수 a 의 값은? (단, $f^{-1}(x)$ 는 $f(x)$ 의 역함수이다.)

- ① 2 ② $\frac{1}{2}$ ③ $-\frac{1}{2}$ ④ -1 ⑤ -2

해설

$f^{-1}(x) = f(x)$ 이려면 $y = f(x)$ 의 그래프는 직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이어야 한다. 직선 $y = x$ 에 대하여 직선 $y = -2x$ 와 대칭인 직선의 방정식은 $x = -2y$ 즉, $y = -\frac{1}{2}x$ 이므로 $a = -\frac{1}{2}$ 이다.



15. 점 (2, 1)을 지나는 일차함수 $y = f(x)$ 의 그래프와 $y = f^{-1}(x)$ 의 그래프가 일치할 때, $f(-2)$ 의 값은?

① -5

② -2

③ 0

④ 2

⑤ 5

해설

$$f = f^{-1} \text{ 이므로 } (f \circ f)(x) = x$$

$$f(x) = m(x - 2) + 1 = mx - 2m + 1 \quad (m \neq 0) \text{ 으로 놓으면}$$

$$f(f(x)) = m(mx - 2m + 1) - 2m + 1 = x$$

$$\therefore m^2x - 2m^2 - m + 1 = x$$

$$\therefore m^2 = 1, -2m^2 - m + 1 = 0 \text{ 이므로}$$

$$m = -1$$

$$\text{따라서 } f(x) = -x + 3 \text{ 이고}$$

$$f(-2) = -(-2) + 3 = 5 \text{ 이다.}$$

16. 점 $(-1, -2)$ 를 지나는 일차함수 $y = f(x)$ 의 그래프와 $y = f^{-1}(x)$ 의 그래프가 일치할 때, $f(-3)$ 의 값은?

① -6

② -3

③ 0

④ 3

⑤ 6

해설

$f = f^{-1}$ 이므로 $(f \circ f)(x) = x$

$f(x) = a(x+1) - 2 = ax + a - 2$ ($a \neq 0$)로 놓으면

$f(f(x)) = a(ax + a - 2) + a - 2 = x$

$\therefore a^2x + a^2 - a - 2 = x$

즉, $a^2 = 1$, $a^2 - a - 2 = 0$ 이므로 $a = -1$

따라서 $f(x) = -x - 3$ 이고

$f(-3) = -(-3) - 3 = 0$ 이다.