1. 복소수 $z = i(a + \sqrt{5}i)^2$ 이 $z = \bar{z}$ 가 되도록 실수 a 의 값을 구하면?

① 5 ② $\sqrt{5}$ ③ 0 ④ ± 5 ⑤ $\pm\sqrt{5}$

해설

$z = i(a^2 - 5 + 2a\sqrt{5}i)$

$= -2a\sqrt{5} + (a^2 - 5)i$

$z = \bar{z}$ 이면 실수이므로 허수부분이 0이다.

$\therefore\ a = \pm\sqrt{5}$

2. 이차함수$y = x^2 - 6x - 10$ 의 최솟값을 구하여라.

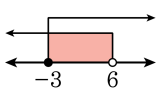
▶ 답:

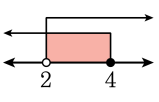
▷ 정답: -19

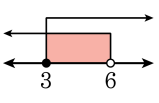
해설

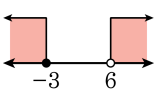
$y = x^2 - 6x - 10 = (x - 3)^2 - 19$
$x = 3$ 일 때, 최솟값은-19 이다.

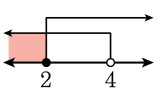
3. 연립부등식 $\begin{cases} 2x-3<9 \\ 4x+1 \geq x-8 \end{cases}$ 의 해를 수직선에 바르게 나타낸 것은?

① 

② 

③ 

④ 

⑤ 

해설

$\begin{cases} 2x-3<9 \rightarrow x<6 \\ 4x+1 \geq x-8 \rightarrow x \geq -3 \end{cases}$

$\therefore -3 \leq x < 6$

4. 연립부등식 $\begin{cases} 1-3x \geq -5 \\ 4x-a > 2(x-2) \end{cases}$ 의 해가 없을 때, 상수 a 의 값의 범위는?

① $a \geq 8$ ② $a < 4$ ③ $\frac{1}{2} \leq a < 2$

④ $4 \leq a < 8$ ⑤ $-4 \leq a < 8$

해설

$1-3x \geq -5,\ 2 \geq x$

$4x-a > 2(x-2),\quad x > \frac{a-4}{2}$

해가 없으므로 $\frac{a-4}{2} \geq 2,\quad a \geq 8$

5. 이차부등식 $x^2 - 2kx + 2k \le 0$이 해를 갖지 않을 때, 실수 k값의 범위는?

① $-1 \le k \le 0$　② $-2 < k < 0$

③ $0 \le x \le 2$　④ $0 < k < 2$

⑤ $k < 0$, 또는 $k > 2$

해설

주어진 이차부등식이 해를 갖지 않으려면
방정식 $x^2 - 2kx + 2k = 0$이 허근을 가져야 하므로

$\frac{D}{4} = k^2 - 2k < 0,\ \ k(k-2) < 0$

$\therefore 0 < k < 2$

6. 원 $x^2 + y^2 = 10$ 위의 점 $(1, -3)$ 에서 원에 그은 접선의 x 절편은?

① -10 ② $-\frac{10}{3}$ ③ -1 ④ 10 ⑤ $\frac{10}{3}$

해설

점 $(1, -3)$ 에서 그은 접선의 방정식은
$1\ x - 3\ y = 10$
x 절편은 $y = 0$ 일 때의 x 좌표이므로 $x = 10$

7. x 에 대한 다항식 x^3+ax^2+bx+2 를 x^2-x+1 로 나눈 나머지가 $x+3$ 이 되도록 a, b 의 값을 정할 때, ab 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $ab=-6$

해설

검산식을 사용

$x^3+ax^2+bx+2=(x^2-x+1)\cdot A+(x+3)$

$A=(x+p)$

$x^3+ax^2+bx+2-(x+3)=(x^2-x+1)(x+p)$

$x^3+ax^2+(b-1)x-1=(x^2-x+1)(x-1)\ \therefore p=-1$

우변을 정리하면

$\therefore\ a=-2,\ b=3$

$\therefore ab=-6$

8. x의 모든 값에 대하여 다음 등식이 성립할 때, 상수 a, b, c의 값의 합을 구하여라.

$$x^3+1=(x-1)(x-2)(x-3)+a(x-1)(x-2)+b(x-1)+c$$

▶ 답:

▷ 정답: 15

해설

x에 대한 항등식이므로
$x=1$일 때, $2=c\cdots\cdots$㉠
$x=2$일 때, $9=b+c\cdots\cdots$㉡
$x=3$일 때, $28=2a+2b+c\cdots\cdots$㉢
㉠, ㉡, ㉢을 연립하여 풀면 $a=6$, $b=7$, $c=2$
$\therefore\ a+b+c=15$

9. 다항식 $x^4+x^2y^2+25y^4$을 인수분해 하였더니 $(x^2+mxy+5y^2)(x^2+nxy+5y^2)$가 되었다. 이 때 상수 m,n의 합 $m+n$의 값을 구하면?

① -6 ② -3 ③ 0 ④ 3 ⑤ 6

해설

$$\begin{aligned}(\text{준식}) &= x^4+10x^2y^2+25y^4-9x^2y^2\\ &= \left(x^2+5y^2\right)^2-(3xy)^2\\ &= \left(x^2+5y^2-3xy\right)\left(x^2+5y^2+3xy\right)\end{aligned}$$

$\therefore\ m+n=0$

10. 부등식 $\left(x+\frac{1}{x}\right)(x^2-|x|-2)\le 0$ 을 풀면?

① $0<x\le 1$ 또는 $x\le -2$　② $0<x\le 1$ 또는 $x\le -1$

③ $0<x\le 2$ 또는 $x\le -1$　④ $0<x\le 2$ 또는 $x\le -2$

⑤ $0<x\le 2$ 또는 $x\le 0$

해설

① $x>0$이면 $|x|=x$, $x+\frac{1}{x}>0$이므로

$x^2-x-2\le 0 \;\rightarrow\; (x-2)(x+1)\le 0$

$\therefore\ -1\le x\le 2$

$\therefore\ 0<x\le 2\ (\because\ x>0)$

② $x<0$이면 $|x|=-x$, $x+\frac{1}{x}<0$이므로

$x^2+x-2\ge 0 \;\rightarrow\; (x-1)(x+2)\ge 0$

$\therefore\ x\le -2,\ x\ge 1$

$\therefore\ x\le -2\ (\because\ x<0)$

①, ②에서 $0<x\le 2,\ x\le -2$

11. 이차부등식 $ax^2+bx+c>0$을 만족하는 x의 범위가 $-1<x<2$일 때, 부등식 $bx^2-ax-c\geq 0$의 해는?

① $-1\leq x\leq 2$　② $-2\leq x\leq 1$　③ $1\leq x\leq 2$

④ $x\leq -2,\ x\geq 1$　⑤ $x\leq -1,\ x\geq 2$

해설

$ax^2+bx+c>0 \Leftrightarrow -1<x<2$

$a(a<0)$로 양변을 나누면

$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}<0 \Leftrightarrow (x+1)(x-2)<0$

$\Leftrightarrow x^2-x-2<0$

$\frac{b}{a}=-1,\ \frac{c}{a}=-2$

$bx^2-ax-c\geq 0$에서 양변을 a로 나누면

$\frac{b}{a}x^2-x-\frac{c}{a}\leq 0$, 문자대신 값을 대입하면

$-x^2-x+2\leq 0 \Leftrightarrow x^2+x-2\geq 0$

$(x+2)(x-1)\geq 0 \ \therefore\ x\leq -2, x\geq 1$

12. 연립부등식

$$\begin{cases} 2x^2 - 5x - 3 \le 0 \\ x^2 + 4x \ge 0 \end{cases}$$ 을 만족하는 정수 x의 개수를 구하면?

① 5개 ② 4개 ③ 3개 ④ 2개 ⑤ 1개

해설

$2x^2 - 5x - 3 \le 0$

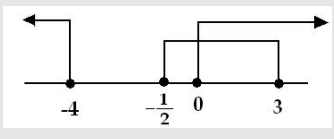
$(x-3)(2x+1) \le 0$

$\rightarrow -\frac{1}{2} \le x \le 3$

$x^2 + 4x \ge 0$

$x(x+4) \ge 0$

$x \le -4$ 또는 $x \ge 0$



해 : $0 \le x \le 3$ $x = 0,\ 1,\ 2,\ 3 \Leftarrow$ 정수해

13. 세 점 A(4, 2), B(0, −2), C(−2, 0) 을 꼭짓점으로 하는 △ABC 는 어떤 삼각형인가?

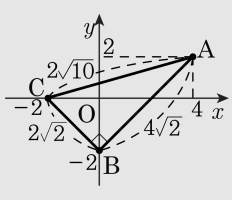
① 정삼각형　② 둔각삼각형

③ $\angle A = 90°$ 인 직각삼각형　④ $\angle B = 90°$ 인 직각삼각형

⑤ $\angle C = 90°$ 인 직각삼각형

해설

△ABC 의 세변의 길이를 구하면



$\overline{AB}$

$= \sqrt{(0-4)^2 + (-2-2)^2}$

$= \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$

$\overline{BC} = \sqrt{(-2-0)^2 + \{0-(-2)\}^2} =$

$\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

$\overline{CA} = \sqrt{\{4-(-2)\}^2 + (2-0)^2} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$

따라서 $\overline{CA}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2$ 이므로

△ABC 는 $\angle B = 90°$ 인 직각삼각형이다.

14. 점 $(1,\ 2)$ 를 직선 $y=2x+1$ 에 대하여 대칭이동한 점의 좌표를 $(a,\ b)$ 라고 할 때, 실수 $a,\ b$ 에 대하여 $5(a+b)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 13

해설

두 점 $(1,\ 2)$, $(a,\ b)$ 를 이은 선분의 중점은

$\left(\frac{1+a}{2},\ \frac{2+b}{2}\right)$

이 점이 직선 $y=2x+1$ 위의 점이므로

$\frac{2+b}{2}=2\cdot\frac{1+a}{2}+1$

$\therefore 2a-b=-2 \quad \cdots\cdots\cdots$ ㉠

또한, 두 점 $(1,\ 2)$, $(a,\ b)$ 를 지나는 직선이

직선 $y=2x+1$ 과 수직이므로

$\frac{b-2}{a-1}=-\frac{1}{2}$

$\therefore\ a+2b=5 \quad \cdots\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=\frac{1}{5},\ b=\frac{12}{5}$

따라서, $5(a+b)=5\cdot\left(\frac{1}{5}+\frac{12}{5}\right)=5\cdot\frac{13}{5}=13$

15. 이차방정식 $f(x)=0$의 두 근의 합이 3일 때, 방정식 $f(2x+1)=0$의 두 근의 합을 구하면?

① $\frac{1}{2}$ ② 2 ③ $\frac{1}{3}$ ④ 3 ⑤ $\frac{1}{4}$

해설

이차방정식 $f(x)=0$의 두 근을 α, β라 할 때,
$\alpha+\beta=3$
한편, $f(2x+1)=0$의 두 근은 $2x+1=\alpha$, $2x+1=\beta$
즉, $x=\frac{\alpha-1}{2}$, $\frac{\beta-1}{2}$이다.

$$\frac{\alpha-1}{2}+\frac{\beta-1}{2}=\frac{\alpha+\beta-2}{2}$$
$$=\frac{3-2}{2}=\frac{1}{2}$$

해설

$f(x)=0$의 두 근을 α, β라 할 때, $\alpha+\beta=3$
$f(x)=k(x-\alpha)(x-\beta)$라 하면
$f(2x+1)=k(2x+1-\alpha)(2x+1-\beta)$
$f(2x+1)=0$의 두 근은 $x=\frac{\alpha-1}{2}$, $\frac{\beta-1}{2}$

$$\therefore \frac{\alpha-1}{2}+\frac{\beta-1}{2}=\frac{\alpha+\beta-2}{2}=\frac{3-2}{2}=\frac{1}{2}$$

16. 세 꼭짓점이 A(1, 3), B(p, 3), C(1, q)인 △ABC의 외심의 좌표가 (2, 1)일 때 pq의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: $pq = -3$

해설

$(2-1)^2 + (1-3)^2 = (2-p)^2 + (1-3)^2$에서 $(p-2)^2 = 1$
$\therefore\ p = 1,\ 3$
그런데 $p = 1$일 때 점 A, B가 일치하므로 $p \neq 1$ $\therefore\ p = 3$
$(2-1)^2 + (1-3)^2 = (2-1)^2 + (1-q)^2$에서 $(q-1)^2 = 4$
$\therefore\ q = 3,\ -1$
그런데 $q = 3$일 때 점 A, C가 일치하므로 $q \neq 3$
$\therefore\ pq = 3 \times (-1) = -3$

17. 두 원 $(x+1)^2+(y+1)^2=2$, $x^2+(y-6)^2=8$ 사이의 최단거리를 d 라 할 때, d^2 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

두 원 사이의 최단 거리는 중심거리에서
두 원의 반지름의 길이를 뺀 것과 같으므로

$d=\sqrt{\{0-(-1)\}^2+\{6-(-1)\}^2}-\sqrt{2}-2\sqrt{2}$

$=5\sqrt{2}-\sqrt{2}-2\sqrt{2}$

$=2\sqrt{2}$

$\therefore\ d^2=8$

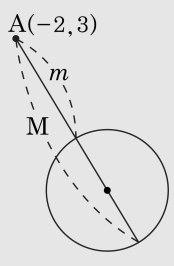
18. 한 정점 A$(-2,\ 3)$ 에서 원 $x^2+y^2-2x+4y-3=0$ 에 이르는 거리의 최댓값을 M, 최솟값을 m 이라 할때, $M+m$ 의 값은?

① $2\sqrt{31}$ ② $4\sqrt{2}+2\sqrt{31}$ ③ $2\sqrt{34}$

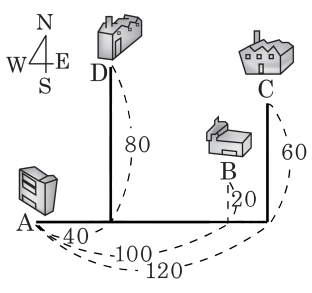
④ $4\sqrt{2}+2\sqrt{34}$ ⑤ $8\sqrt{2}$

해설

$x^2+y^2-2x+4y-3=(x-1)^2+(y+2)^2-8=0$
에서
$(x-1)^2+(y+2)^2=(2\sqrt{2})^2$
그림에서 점과 원 사이의 거리의 최댓값은
(점과 원의 중심 사이의 거리)+(반지름)
즉 $\sqrt{(-2-1)^2+(3+2)^2}+2\sqrt{2}=2\sqrt{2}+\sqrt{34}$
최솟값은 (점과 원의 중심 사이의 거리)-반지름
$=\sqrt{34}-2\sqrt{2}$
$\therefore M+m=2\sqrt{34}$



19. 네 개의 공장 A, B, C, D는 A 공장을 기준으로 B 공장은 정동방향으로 100 m 이동한 다음 정북방향으로 20 m 이동한 지점에, C 공장은 정동방향으로 120 m 이동한 다음 정북방향으로 60 m 이동한 지점에, D 공장은 정동방향으로 40 m 이동한다음 정북방향으로 80 m 이동한 지점에 있다. 네 개의 공장에서 흘러나오는 폐수를 정화하기 위해 배관시설에 드는 비용을 최소로 하여 정화시설을 만들려고 할 때, 정화시설은 A 공장으로부터 정동방향으로 a m, 정북방향으로 b m인 지점이다. 이때, $a+2b$의 값을 구하면? (단, 각 공장에서 정화시설까지 하수도배관이 묻히는 고도는 무시하여 연결되며 비용은 배관의 길이에 비례한다.)



▶ 답:

▷ 정답: 160

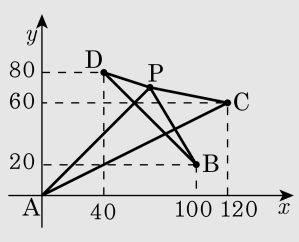
해설

점 A를 원점으로 하여 공장 B, C, D의 위치를 좌표평면 위에 나타내면 좌표평면 위의 임의의 점 P에 대하여

$\overline{AP}+\overline{CP} \geq \overline{AC}$이고 $\overline{BP}+\overline{DP} \geq \overline{BD}$이므로

$\overline{AP}+\overline{BP}+\overline{CP}+\overline{DP} \geq \overline{AC}+\overline{BD}$

점 P가 $\overline{AC}$와 $\overline{BD}$의 교점일 때 각 공장에서 정화시설까지의 거리가 최소이다.



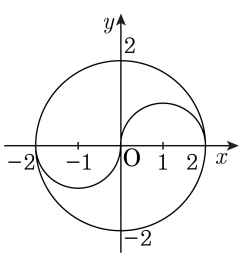
$\overline{AC}$의 방정식은 $y=\frac{1}{2}x$, $\overline{BD}$의 방정식은

$y=-x+120$ 이고, 교점의 좌표는 $(80,\ 40)$

따라서 $a=80,\ b=40$

$\therefore\ a+2b=160$

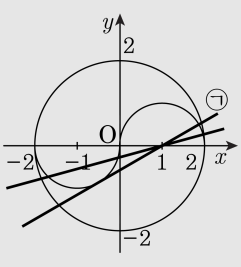
20. 다음 그림과 같이 좌표평면 위에 원과 반원으로 이루어진 태극문양이 있다. 태극문양과 직선 $y=a(x-1)$이 서로 다른 다섯 점에서 만나도록 하는 실수 a의 값의 범위는?



① $0<a<\frac{\sqrt{2}}{3}$ ② $0<a<\frac{\sqrt{3}}{3}$
③ $0<a<\frac{2}{3}$ ④ $0<a<\frac{\sqrt{5}}{3}$
⑤ $0<a<\frac{\sqrt{6}}{3}$

해설

직선 $y=a(x-1)$의 그래프는 실수 a의 값에
관계없이 항상 점 $(1,0)$을 지나므로
직선이 태극문양과 서로 다른 다섯 점에서 만나는 경우는 다음 그림과 같이 x축과 직선 ㉠사이를 움직이는 직선일 때이다.



이때, 직선의 기울기는 양수이므로 $a>0$
직선과 제3사분면의 반원이 접하는 경우,
점 $(-1,0)$과 직선 $y=a(x-1)$,
즉 $ax-y-a=0$사이의 거리가 원의 반지름의 길이 1과 같으므로

$$\frac{|-a-0-a|}{\sqrt{a^2+1}}=1, |2a|=\sqrt{a^2+1}$$

위의 식의 양변을 제곱하면

$$4a^2=a^2+1, a^2=\frac{1}{3}$$

$$\therefore a=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$$

그런데 $a>0$이므로 $a=\frac{\sqrt{3}}{3}$

따라서, 직선과 태극문양이 서로 다른 다섯 점에서 만나기 위한 실수 a의 값의 범위는

$0<a<\frac{\sqrt{3}}{3}$이다.