1. 이차함수 $y = x^2 - 8x + a$의 그래프와 x축과의 교점의 x좌표가 6, b일 때, $a + b$의 값은?

① 11 ② 12 ③ 13 ④ 14 ⑤ 15

해설

이차함수 $y = x^2 - 8x + a$의 그래프와
x축과의 교점의 x좌표는
이차방정식 $x^2 - 8x + a = 0$의 실근이다.
$x^2 - 8x + a = 0$에 $x = 6$을 대입하면
$36 - 48 + a = 0$에서 $a = 12$
따라서 $x^2 - 8x + 12 = 0$에서 $(x - 2)(x - 6) = 0$
$x = 2$ 또는 $x = 6$
$\therefore\ b = 2\ \therefore\ a + b = 14$

2. 이차함수 $y = x^2 + (k-3)x + k$ 의 그래프가 x 축과 만나지 않을 때, 실수 k 의 값의 범위는?

① $-1 < k < 7$ ② $-1 < k < 8$ ③ $0 < k < 9$

④ $1 < k < 9$ ⑤ $1 < k < 10$

해설

주어진 이차함수의 그래프가
x 축과 만나지 않으려면
이차방정식 $x^2 + (k-3)x + k = 0$ 이
실근을 갖지 않아야 하므로
$D = (k-3)^2 - 4k < 0$
$k^2 - 10k + 9 < 0$, $(k-1)(k-9) < 0$
$\therefore\ 1 < k < 9$

3. 직선 $y = 3x + 2$ 와 포물선 $y = x^2 + mx + 3$ 이 두 점에서 만나기 위한 실수 m 의 범위를 구하면?

① $m < -1, m > 3$ ② $m < 1, m > 5$ ③ $-1 < m < 3$

④ $-1 < m < 5$ ⑤ $1 < m < 5$

해설

$y = 3x + 2, y = x^2 + mx + 3$ 에서 y 를 소거하면

$x^2 + (m-3)x + 1 = 0, D = (m-3)^2 - 4 > 0$

$m^2 - 6m + 5 > 0, (m-1)(m-5) > 0$

$\therefore\ m < 1,\ m > 5$

4. 이차함수 $y = x^2 - 2ax - 2b^2 - 4a + 4b - 6$의 그래프가 x축에 접할 때, $a^2 + b^2$의 값은? (단, a, b는 실수)

① 2 ② 5 ③ 8 ④ 10 ⑤ 13

해설

$x^2 - 2ax - 2b^2 - 4a + 4b - 6 = 0$에서

$\dfrac{D}{4} = a^2 - (-2b^2 - 4a + 4b - 6) = 0$

$\therefore (a+2)^2 + 2(b-1)^2 = 0$

이 때, a, b가 실수이므로 $a + 2 = 0, b - 1 = 0$

따라서 $a = -2, b = 1$이므로

$a^2 + b^2 = 5$

5. 함수 $y = -x^2 + kx$의 그래프가 직선 $y = -x + 4$에 접할 때, 양수 k의 값은?

① 1 ② $\frac{3}{2}$ ③ 2 ④ $\frac{5}{2}$ ⑤ 3

해설

$y = -x^2 + kx$가 $y = -x + 4$에 접하려면
$4 - x = -x^2 + kx \Rightarrow x^2 - (k+1)x + 4 = 0$의 판별식은 $D = 0$
이어야 한다.
$D = (k+1)^2 - 16 = 0 \Rightarrow k + 1 = \pm 4$
$\therefore k = 3 \ (\because k > 0)$

6. 포물선 $y = x^2 - 2kx + 2k + 3$과 x축과의 두 교점 사이의 거리가 $2\sqrt{5}$일 때, 모든 k의 값의 합을 구하여라.

▶ 답:

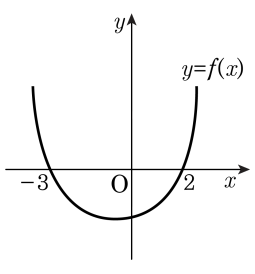
▷ 정답: 2

해설

포물선 $y = x^2 - 2kx + 2k + 3$ 과 x 축과의 교점의 x 좌표는
이차방정식 $x^2 - 2kx + 2k + 3 = 0$ 의 두 근이므로 두 근을 α, β 라 하면 이차방정식의 두 근과 계수의 관계에 의하여
$\alpha + \beta = 2k$, $\alpha\beta = 2k + 3$
$|\alpha - \beta| = 2\sqrt{5}$에서 $|\alpha - \beta|^2 = (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta$이므로
$20 = (2k)^2 - 4(2k + 3)$, $4k^2 - 8k - 12 = 20$

$k^2 - 2k - 8 = 0$
따라서, 근과 계수의 관계에 의하여 모든 k의 값의 합은 2이다.

7. 이차함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 다음 그림과 같을 때, 방정식 $f(x^2-1)=0$ 의 서로 다른 실근의 개수는?



① 1 개 ② 2 개 ③ 3 개
④ 4 개 ⑤ 5 개

해설

주어진 그래프에서 $f(-3)=0,\ f(2)=0$ 이므로
방정식 $f(x^2-1)=0$ 의 근은
(i) $x^2-1=-3$ 일 때, $x^2=-2 \quad \therefore\ x=\pm\sqrt{2}i$
(ii) $x^2-1=2$ 일 때, $x^2=3 \quad \therefore x=\pm\sqrt{3}$
(i), (ii) 에서 주어진 방정식의 서로 다른 실근의 개수는 2 개이다.

8. 포물선 $y = x^2 + 2ax + b$가 x축과는 접하고 직선 $y = 4x$와는 서로 만나지 않을 때, 상수 a의 값의 범위는?

① $a > -1$ ② $a < -1$ ③ $a > 0$

④ $a < 1$ ⑤ $a > 1$

해설

포물선 $y = x^2 + 2ax + b$ 가 x축과는 접하므로
이차방정식 $y = x^2 + 2ax + b = 0$의 판별식을 D라 하면

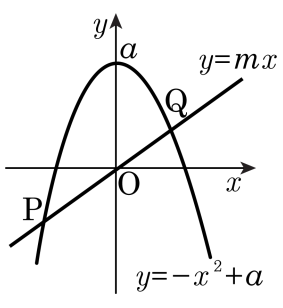
$\frac{D}{4} = a^2 - b = 0 \quad \therefore b = a^2 \quad \cdots\cdots$ ㉠

또, 포물선 $y = x^2 + 2ax + b$가 직선 $y = 4x$와 서로 만나지 않으려면
이차방정식 $x^2 + 2ax + b = 4x$,
즉 $x^2 + 2(a-2)x + b = 0$의 판별식을 D'이라 할 때

$\frac{D'}{4} = (a-2)^2 - b < 0 \cdots\cdots$ ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면 $(a-2)^2 - a^2 < 0, \ -4a + 4 < 0$
$\therefore a > 1$

9. 다음 그림과 같이 이차함수 $y = -x^2 + a$의 그래프와 직선 $y = mx$가 서로 다른 두 점 P, Q에서 만난다. 점 Q의 x좌표가 $\sqrt{5} - 1$일 때, $a + m$의 값을 구하여라. (단, a , m 은 유리수)



▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

$y = -x^2 + a$ 와 $y = mx$ 가 만나는 두 점 P, Q 의 x 좌표는 방정식이 $-x^2 + a = mx$ 의 근이다.
점 Q의 x 좌표가 $\sqrt{5} - 1$이므로
방정식 $x^2 + mx - a = 0$의 한 근이 $\sqrt{5} - 1$ 이다.
그런데 a 와 m 이 유리수이므로 다른 한 근은 $-\sqrt{5} - 1$ 이다.
따라서, 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
$-m = \left(\sqrt{5} - 1\right) + \left(-\sqrt{5} - 1\right) = -2$

$-a = \left(\sqrt{5} - 1\right)\left(-\sqrt{5} - 1\right) = -4$
$\therefore a = 4,\ m = 2 \qquad \therefore a + m = 6$

10. 이차함수 $y = 2x^2 - 3x + 1$의 그래프와 직선 $y = ax + b$의 두 교점의 x좌표가 각각 1, 5일 때, 상수 a, b의 곱 ab의 값은?

① -81 ② -45 ③ 0 ④ 5 ⑤ 14

해설

이차방정식 $2x^2 - 3x + 1 = ax + b$, 즉 $2x^2 - (3 + a)x + 1 - b = 0$의 두 근이 1, 5이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$1 + 5 = \dfrac{3 + a}{2}$, $1 \times 5 = \dfrac{1 - b}{2}$

$\therefore a = 9,\ b = -9$

$\therefore ab = -81$

11. 이차함수 $y = 2x^2 + ax + 12$의 그래프와 직선 $y = 5x + b$가 두 점 P, Q에서 만난다. 선분 PQ의 중점의 좌표가 $(3,\ 17)$일 때, $a + b$의 값은?

① -5 ② -4 ③ -3 ④ -2 ⑤ -1

해설

두 점 P, Q 의 x 좌표를 각각 α, β 라고 하면
α, β 는 이차방정식 $2x^2 + ax + 12 = 5x + b$의 두 실근이다.
$2x^2 + (a-5)x + 12 - b = 0$에서 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha + \beta = -\dfrac{a-5}{2}$ ····· ㉠

또, 선분 PQ의 중점의 x좌표가 3이므로

$\dfrac{\alpha + \beta}{2} = 3$에서 $\alpha + \beta = 6$ ····· ㉡

㉠, ㉡에서 $-\dfrac{a-5}{2} = 6$

$\therefore a = -7$

또, 점 $(3,\ 17)$은 직선 $y = 5x + b$ 위의 점이므로 $17 = 5 \cdot 3 + b$ $\therefore b = 2$

$\therefore a + b = -7 + 2 = -5$

12. 두 이차함수 $y = x^2 - ax + b$ 와 $y = x^2 - bx + a$ 의 그래프의 교점이 x 축 위에 있도록 상수 a, b 의 값을 정할 때, $a + b$ 의 값은? (단, $a \neq b$)

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

교점의 x 좌표를 p 라 하면

$p^2 - ap + b = p^2 - bp + a$

$(a - b)p + a - b = 0$

$(a - b)(p + 1) = 0$

$a \neq b$ 이므로 $p = -1$

그런데 교점이 x 축 위에 있으므로

교점의 y 좌표는 0 이다.

$\therefore 1 + a + b = 0$

$\therefore a + b = -1$

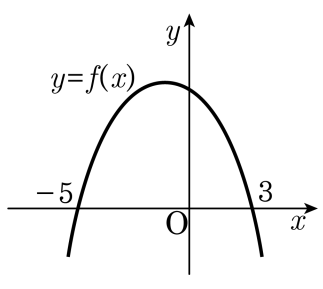
13. $y=0$, $y=(k-2)x^2-6(k-1)x+9k+1$을 동시에 만족하는 $(x,\ y)$가 2개일 때, 정수 k의 최댓값은?

① 8 ② 9 ③ 10 ④ 11 ⑤ 12

해설

$y=(k-2)x^2-6(k-1)x+9k+1$의 그래프는 x축과 서로 다른 두 점에서 만난다.
이 때, 방정식 $(k-2)x^2-6(k-1)x+9k+1=0$은 이차방정식이어야 하므로 $k-2\neq 0$
$\therefore k\neq 2$ ····· ㉠
또, 이차방정식의 판별식을 D 라하면 $D>0$이어야 하므로
$\frac{D}{4}=\{3(k-1)\}^2-(k-2)(9k+1)>0$
$9(k^2-2k+1)-(9k^2-17k-2)>0$
$-k+11>0$
$\therefore k<11$ ····· ㉡
㉠, ㉡에서 $k<11$, $k\neq 2$
따라서, 정수 k의 최댓값은 10이다.

14. 이차함수 $y = f(x)$ 의 그래프가 다음 그림과 같을 때, 이차방정식 $f\left(\frac{x-4}{2}\right) = 0$ 의 두 근의 합은?



① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

해설

$f(x) = a(x+5)(x-3)$ $(a<0)$ 으로 놓으면

$$f\left(\frac{x-4}{2}\right) = a\left(\frac{x-4}{2}+5\right)\left(\frac{x-4}{2}-3\right)$$
$$= \frac{a}{4}(x+6)(x-10)$$ 이므로

$\frac{a}{4}(x+6)(x-10) = 0$ 에서

$x = -6$ 또는 $x = 10$

따라서 방정식 $f\left(\frac{x-4}{2}\right) = 0$ 의 두 근의 합은 4

15. 이차함수 $y=-x^2-6x-3$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 m 만큼, y 축의 방향으로 $2m$ 만큼 평행이동한 그래프는 x 축과 서로 다른 두 점에서 만난다. 이 때, 정수 m 의 최솟값은?

① 2 ② 1 ③ 0 ④ -1 ⑤ -2

해설

$y=-x^2-6x-3$ 의 그래프를
x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로
$2m$만큼 평행이동한 그래프의 식은
$y-2m=-(x-m)^2-6(x-m)-3$
즉, $y=-x^2+2(m-3)x-m^2+8m-3$ 이
그래프가 x 축과 서로 다른 두 점에서 만나므로
$\frac{D}{4}=(m-3)^2-m^2+8m-3>0$
$2m+6>0$
$\therefore\ m>-3$
따라서 정수 m 의 최솟값은 -2 이다.