1. 이차함수 $y = x^2 - 8x + a$의 그래프와 x축과의 교점의 x좌표가 6, b일 때, $a+b$의 값은?

① 11　② 12　③ 13　④ 14　⑤ 15

해설

이차함수 $y = x^2 - 8x + a$의 그래프와
x축과의 교점의 x좌표는
이차방정식 $x^2 - 8x + a = 0$의 실근이다.
$x^2 - 8x + a = 0$에 $x = 6$을 대입하면
$36 - 48 + a = 0$에서 $a = 12$
따라서 $x^2 - 8x + 12 = 0$에서 $(x-2)(x-6) = 0$
$x = 2$ 또는 $x = 6$
$\therefore\ b = 2 \therefore\ a + b = 14$

2. 이차함수 $y = x^2 + (k-3)x + k$ 의 그래프가 x 축과 만나지 않을 때, 실수 k 의 값의 범위는?

① $-1 < k < 7$ ② $-1 < k < 8$ ③ $0 < k < 9$

④ $1 < k < 9$ ⑤ $1 < k < 10$

해설

주어진 이차함수의 그래프가
x 축과 만나지 않으려면
이차방정식 $x^2 + (k-3)x + k = 0$ 이
실근을 갖지 않아야 하므로
$D = (k-3)^2 - 4k < 0$
$k^2 - 10k + 9 < 0,\ (k-1)(k-9) < 0$
$\therefore\ 1 < k < 9$

3. 직선 $y = 3x + 2$ 와 포물선 $y = x^2 + mx + 3$ 이 두 점에서 만나기 위한 실수 m 의 범위를 구하면?

① $m < -1, m > 3$ ② $m < 1, m > 5$ ③ $-1 < m < 3$

④ $-1 < m < 5$ ⑤ $1 < m < 5$

해설

$y = 3x + 2, y = x^2 + mx + 3$ 에서 y 를 소거하면

$x^2 + (m-3)x + 1 = 0, D = (m-3)^2 - 4 > 0$

$m^2 - 6m + 5 > 0, (m-1)(m-5) > 0$

$\therefore\ m < 1,\ m > 5$

4. 이차함수 $y = x^2 - 2ax - 2b^2 - 4a + 4b - 6$ 의 그래프가 x축에 접할 때, $a^2 + b^2$ 의 값은? (단, a, b는 실수)

① 2 ② 5 ③ 8 ④ 10 ⑤ 13

해설

$x^2 - 2ax - 2b^2 - 4a + 4b - 6 = 0$ 에서

$$\frac{D}{4} = a^2 - (-2b^2 - 4a + 4b - 6) = 0$$

$\therefore (a+2)^2 + 2(b-1)^2 = 0$

이 때, a, b가 실수이므로 $a + 2 = 0, b - 1 = 0$

따라서 $a = -2, b = 1$ 이므로

$a^2 + b^2 = 5$

5. 함수 $y=-x^2+kx$의 그래프가 직선 $y=-x+4$에 접할 때, 양수 k의 값은?

① 1　② $\frac{3}{2}$　③ 2　④ $\frac{5}{2}$　⑤ 3

해설

$y=-x^2+kx$가 $y=-x+4$에 접하려면
$4-x=-x^2+kx \quad \Rightarrow \quad x^2-(k+1)x+4=0$의 판별식은 $D=0$
이어야 한다.
$D=(k+1)^2-16=0 \quad \Rightarrow \quad k+1=\pm 4$
$\therefore k=3 \ (\because k>0)$

6. 포물선 $y=x^2-2kx+2k+3$과 x축과의 두 교점 사이의 거리가 $2\sqrt{5}$일 때, 모든 k의 값의 합을 구하여라.

▶ **답 :**

▷ **정답 :** 2

해설

포물선 $y=x^2-2kx+2k+3$ 과 x 축과의 교점의 x 좌표는 이차방정식 $x^2-2kx+2k+3=0$ 의 두 근이므로 두 근을 α, β 라 하면 이차방정식의 두 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=2k,\ \alpha\beta=2k+3$

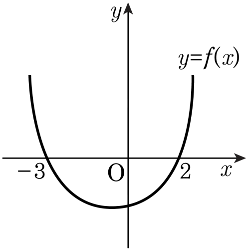
$|\alpha-\beta|=2\sqrt{5}$에서 $|\alpha-\beta|^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta$이므로

$20=(2k)^2-4(2k+3),\ 4k^2-8k-12=20$

$k^2-2k-8=0$

따라서, 근과 계수의 관계에 의하여 모든 k의 값의 합은 2이다.

7. 이차함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 다음 그림과 같을 때, 방정식 $f(x^2-1)=0$ 의 서로 다른 실근의 개수는?



① 1개 ② 2개 ③ 3개

④ 4개 ⑤ 5개

해설

주어진 그래프에서 $f(-3)=0,\ f(2)=0$ 이므로

방정식 $f(x^2-1)=0$ 의 근은

(i) $x^2-1=-3$ 일 때, $x^2=-2 \quad \therefore\ x=\pm\sqrt{2}i$

(ii) $x^2-1=2$ 일 때, $x^2=3 \quad \therefore\ x=\pm\sqrt{3}$

(i), (ii)에서 주어진 방정식의 서로 다른 실근의 개수는 2개이다.

8. 포물선 $y = x^2 + 2ax + b$가 x축과는 접하고 직선 $y = 4x$와는 서로 만나지 않을 때, 상수 a의 값의 범위는?

① $a > -1$　　② $a < -1$　　③ $a > 0$

④ $a < 1$　　⑤ $a > 1$

해설

포물선 $y = x^2 + 2ax + b$ 가 x축과는 접하므로
이차방정식 $y = x^2 + 2ax + b = 0$ 의 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4} = a^2 - b = 0 \qquad \therefore b = a^2 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

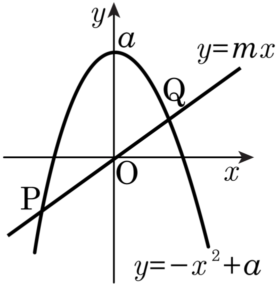
또, 포물선 $y = x^2 + 2ax + b$가 직선 $y = 4x$와 서로 만나지 않으려면
이차방정식 $x^2 + 2ax + b = 4x$,
즉 $x^2 + 2(a-2)x + b = 0$의 판별식을 D'이라 할 때

$$\frac{D'}{4} = (a-2)^2 - b < 0 \cdots\cdots ㉡$$

㉠을 ㉡에 대입하면 $(a-2)^2 - a^2 < 0$, $-4a + 4 < 0$

$\therefore a > 1$

9. 다음 그림과 같이 이차함수 $y=-x^2+a$의 그래프와 직선 $y=mx$가 서로 다른 두 점 P, Q에서 만난다. 점 Q의 x좌표가 $\sqrt{5}-1$일 때, $a+m$의 값을 구하여라. (단, a , m 은 유리수)



▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

$y=-x^2+a$ 와 $y=mx$ 가 만나는 두 점 P, Q 의 x 좌표는 방정식이 $-x^2+a=mx$ 의 근이다.

점 Q의 x 좌표가 $\sqrt{5}-1$이므로

방정식 $x^2+mx-a=0$의 한 근이 $\sqrt{5}-1$ 이다.

그런데 a 와 m 이 유리수이므로 다른 한 근은 $-\sqrt{5}-1$ 이다.

따라서, 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$-m=\left(\sqrt{5}-1\right)+\left(-\sqrt{5}-1\right)=-2$

$-a=\left(\sqrt{5}-1\right)\left(-\sqrt{5}-1\right)=-4$

$\therefore a=4,\ m=2 \qquad \therefore a+m=6$

10. 이차함수 $y=2x^2-3x+1$의 그래프와 직선 $y=ax+b$의 두 교점의 x좌표가 각각 1, 5일 때, 상수 a, b의 곱 ab의 값은?

① -81 ② -45 ③ 0 ④ 5 ⑤ 14

해설

이차방정식 $2x^2-3x+1=ax+b$, 즉 $2x^2-(3+a)x+1-b=0$의 두 근이 1, 5이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$1+5=\frac{3+a}{2},\ 1\times 5=\frac{1-b}{2}$$

$\therefore a=9,\ b=-9$

$\therefore ab=-81$

11. 이차함수 $y=2x^2+ax+12$의 그래프와 직선 $y=5x+b$가 두 점 P, Q에서 만난다. 선분 PQ의 중점의 좌표가 $(3,\ 17)$일 때, $a+b$의 값은?

① -5 ② -4 ③ -3 ④ -2 ⑤ -1

해설

두 점 P, Q 의 x 좌표를 각각 α, β 라고 하면
α, β 는 이차방정식 $2x^2+ax+12=5x+b$의 두 실근이다.
$2x^2+(a-5)x+12-b=0$에서 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+\beta=-\frac{a-5}{2} \cdots\cdots ㉠$$

또, 선분 PQ의 중점의 x좌표가 3이므로

$$\frac{\alpha+\beta}{2}=3 \text{에서 } \alpha+\beta=6 \cdots\cdots ㉡$$

㉠, ㉡에서 $-\dfrac{a-5}{2}=6$

$\therefore a=-7$

또, 점 $(3,\ 17)$은 직선 $y=5x+b$ 위의 점이므로 $17=5\cdot3+b$ $\therefore$ $b=2$

$\therefore a+b=-7+2=-5$

12. 두 이차함수 $y = x^2 - ax + b$ 와 $y = x^2 - bx + a$ 의 그래프의 교점이 x 축 위에 있도록 상수 a, b 의 값을 정할 때, $a + b$ 의 값은? (단, $a \neq b$)

① -2　　② -1　　③ 0　　④ 1　　⑤ 2

해설

교점의 x 좌표를 p 라 하면

$p^2 - ap + b = p^2 - bp + a$

$(a - b)p + a - b = 0$

$(a - b)(p + 1) = 0$

$a \neq b$ 이므로 $p = -1$

그런데 교점이 x 축 위에 있으므로

교점의 y 좌표는 0 이다.

$\therefore 1 + a + b = 0$

$\therefore a + b = -1$

13. $y=0$, $y=(k-2)x^2-6(k-1)x+9k+1$을 동시에 만족하는 $(x,\ y)$가 2개일 때, 정수 k의 최댓값은?

① 8 ② 9 ③ 10 ④ 11 ⑤ 12

해설

$y=(k-2)x^2-6(k-1)x+9k+1$의 그래프는 x축과 서로 다른 두 점에서 만난다.
이 때, 방정식 $(k-2)x^2-6(k-1)x+9k+1=0$은 이차방정식이어야 하므로 $k-2\neq 0$

$\therefore k\neq 2 \cdots\cdots$ ㉠

또, 이차방정식의 판별식을 D라하면 $D>0$이어야 하므로

$$\frac{D}{4}=\{3(k-1)\}^2-(k-2)(9k+1)>0$$

$$9\left(k^2-2k+1\right)-\left(9k^2-17k-2\right)>0$$

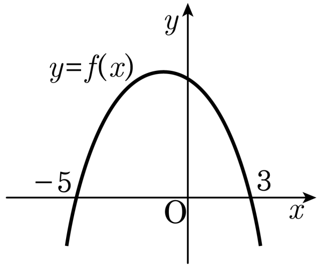
$$-k+11>0$$

$\therefore k<11 \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서 $k<11,\ k\neq 2$

따라서, 정수 k의 최댓값은 10이다.

14. 이차함수 $y = f(x)$ 의 그래프가 다음 그림과 같을 때, 이차방정식 $f\left(\dfrac{x-4}{2}\right) = 0$ 의 두 근의 합은?



① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

해설

$f(x) = a(x+5)(x-3)$ $(a<0)$ 으로 놓으면

$$f\left(\frac{x-4}{2}\right) = a\left(\frac{x-4}{2}+5\right)\left(\frac{x-4}{2}-3\right)$$
$$= \frac{a}{4}(x+6)(x-10)$$ 이므로

$\dfrac{a}{4}(x+6)(x-10) = 0$ 에서

$x = -6$ 또는 $x = 10$

따라서 방정식 $f\left(\dfrac{x-4}{2}\right) = 0$ 의 두 근의 합은 4

15. 이차함수 $y=-x^2-6x-3$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 m 만큼, y 축의 방향으로 $2m$ 만큼 평행이동한 그래프는 x 축과 서로 다른 두 점에서 만난다. 이 때, 정수 m 의 최솟값은?

① 2　　② 1　　③ 0　　④ -1　　⑤ -2

해설

$y=-x^2-6x-3$ 의 그래프를
x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로
$2m$만큼 평행이동한 그래프의 식은
$y-2m=-(x-m)^2-6(x-m)-3$
즉, $y=-x^2+2(m-3)x-m^2+8m-3$ 이
그래프가 x 축과 서로 다른 두 점에서 만나므로
$\frac{D}{4}=(m-3)^2-m^2+8m-3>0$
$2m+6>0$
$\therefore\ m>-3$
따라서 정수 m 의 최솟값은 -2 이다.